



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E A CALIBRAÇÃO DE BLOCOS PADRÃO EM UM LABORATÓRIO DE METROLOGIA

Thiago de Souza Coutinho – tdsc55@gmail.com

Sandro Azevedo Carvalho – scarvalho@sapucaia.ifsul.edu.br

Instituto Federal Sul-Rio-Grandense

Av. Copacabana, 100 – Bairro Piratini

CEP 93.216-120 – Sapucaia do Sul – RS

Resumo: *O presente artigo trata do problema, levantado por um aluno durante a aula, de determinar o tempo mínimo necessário ao equilíbrio térmico de blocos padrão de comprimento em um laboratório de metrologia. Descreve o método aplicado para resolver o problema, utilizando a lei de resfriamento de Newton e conceitos trabalhados na disciplina de equações diferenciais. Na obtenção dos dados da temperatura, foi utilizado um datalogger com software específico. Os dados foram exportados para o software Excel e foram comparados às modelagens realizadas com o uso de equações diferenciais de primeira ordem. Os resultados demonstraram total compatibilidade entre a modelagem matemática e os dados de referência obtidos com o datalogger, possibilitando o uso de um método sistemático para identificar o menor tempo necessário para o equilíbrio térmico.*

Palavras-chave: *Bloco padrão, Equilíbrio térmico, Lei de resfriamento de Newton, Equações diferenciais, Variáveis separáveis.*

1. INTRODUÇÃO

Professores de matemática, em qualquer nível de escolaridade, são sempre questionados pelos estudantes quanto às aplicações dos conteúdos trabalhados em aula. Perguntas como “Para que serve isso?” ou “Onde posso aplicar esses conceitos?” nem sempre são respondidas de maneira satisfatória.

Embora a matemática não deva ser ensinada apenas pelo apelo às suas aplicações, situações realmente práticas em que o assunto que está sendo trabalhado pode ser aplicado são sempre bem vindas e agregam mais sentido ao conteúdo.

Em geral, a proposição de aplicações para os conteúdos tem origem na tentativa dos professores de responder às perguntas feitas no primeiro parágrafo. Porém, às vezes, ocorre de um aluno trazer um problema real, isto é, um problema que ele observa em sua prática de trabalho e que é tratado mais na base da experiência e do bom senso do que em estudos sistemáticos.

Uma situação dessas ocorreu durante uma aula de equações diferenciais no curso de Engenharia Mecânica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense – IFSUL – Campus Sapucaia do Sul, no primeiro semestre de 2013, quando o professor apresentava a lei de resfriamento de Newton como um problema para ser resolvido através do método de separação de variáveis. Verificou-se, a partir da solução da equação

diferencial, que a temperatura de um objeto tende a igualar-se com a temperatura do ambiente, o que é chamado de equilíbrio térmico. Matematicamente, o equilíbrio térmico somente ocorrerá no limite quando o tempo tender ao infinito. Porém, devido às limitações dos instrumentos de medição, observa-se que existe um instante de tempo finito a partir do qual a temperatura do objeto pode ser considerada igual à temperatura do ambiente.

Neste momento, um aluno percebeu que a última observação poderia ser aplicada em sua rotina de trabalho e solicitou a ajuda do professor para estudar como determinar o menor tempo a partir do qual se poderia considerar a temperatura de um bloco padrão igual à temperatura ambiente, dentro de uma margem de erro aceitável.

Tal questionamento decorre de uma atividade rotineira em um laboratório de metrologia: a calibração do desvio do comprimento central de blocos padrão. Embora seja possível a correção do efeito da dilatação térmica, as calibrações são realizadas com os blocos a uma temperatura mais próxima possível de 20 °C (DOIRON & BEERS, 2005). Para garantir que as diferenças de temperatura do bloco padrão a ser calibrado com os padrões de referência sejam as menores possíveis, recomenda-se que os blocos repousem durante uma noite inteira no ambiente de calibração (TESA, 1991), ou mesmo por até vinte e quatro horas (UKAS, 2008), como um período mínimo para estabilização térmica.

O presente artigo relata o problema, levantado pelo aluno, de sistematizar a determinação do tempo mínimo necessário ao equilíbrio térmico de blocos padrão em um laboratório de metrologia e sua solução, utilizando conceitos trabalhados na disciplina de equações diferenciais.

2. A LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

A lei empírica de resfriamento de Newton descreve que a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo decresce é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia (ZILL, 2011), e pode ser descrita pela “Equação (1)”.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (1)$$

onde,

$\frac{dT}{dt}$: taxa instantânea segundo a qual a temperatura do corpo varia em relação ao tempo;

T : temperatura do corpo em função do tempo;

t : tempo ($t \geq 0$);

k : constante de proporcionalidade ($k > 0$);

T_a : temperatura do meio que rodeia o corpo, considerada constante ($T > T_a$).

Existem vários métodos de resolução da “Equação (1)”, sendo que naquele momento da disciplina estava-se estudando o método de separação de variáveis.

2.1. O método de separação de variáveis¹

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é dita separável quando pode ser expressa na forma da “Equação (2)”.

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \quad (2)$$

¹Assumiremos aqui que uma função $y = \phi(x)$ satisfaz as condições de existência de soluções da equação diferencial.

Multiplicando a “Equação (2)” por $\frac{1}{h(y)}$, com $h(y)$ não nulo², podemos escrever a “Equação (3)”:

$$p(y) \frac{dy}{dx} = g(x), \quad (3)$$

onde, convenientemente, denotamos $\frac{1}{h(y)}$ por $p(y)$.

Mas, se $y = \phi(x)$ representa uma solução da “Equação (2)”, temos a “Equação (4)”.

$$p(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = g(x) \quad (4)$$

Integrando-se a “Equação (4)” em relação a x , obtemos a “Equação (5)”.

$$\int p(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx = \int g(x) dx \quad (5)$$

Como $dy = \phi'(x) dx$, então a “Equação (5)” pode ser reescrita como a “Equação (6)”.

$$\int p(y) dy = \int g(x) dx \quad (6)$$

2.2. Resolução da equação diferencial

Utilizando o método de separação de variáveis para encontrar a solução da “Equação (1)”, escrevemos a “Equação (7)”:

$$\int \frac{dT}{(T - T_a)} = \int -k dt, \quad (7)$$

de onde temos a “Equação (8)”,

$$\ln(T - T_a) + C_1 = -kt + C_2, \quad (8)$$

Com C_1 e C_2 sendo constantes arbitrárias de integração.

Fazendo $C_3 = C_2 - C_1$, a “Equação (8)” pode ser reescrita como a “Equação (9)”.

$$\ln(T - T_a) = -kt + C_3. \quad (9)$$

Aplicando a função exponencial de base e (número de Euler) em ambos os membros da “Equação (9)”, obtemos a “Equação (10)”:

$$T = T_a + C e^{-kt}, \quad (10)$$

Onde $C = e^{C_3}$.

²Se $h(y) = 0$, então $\frac{dy}{dx} = 0$, implicando que $y = \text{constante}$ é solução da equação diferencial.

Supondo que no instante inicial, $t = 0$, temos a temperatura inicial, T_0 , a solução da “Equação (1)” é, então, dada pela “Equação (11)”.

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-k \cdot t} \quad (11)$$

A constante k , em algum tempo específico, k_t , pode ser calculada pela “Equação (12)”.

$$k_t = \frac{1}{t} \ln \left[\frac{(T_0 - T_a)}{(T(t) - T_a)} \right] \quad (12)$$

3. O TEMPO MÍNIMO PARA O EQUILÍBRIO TÉRMICO

Levando em consideração a “Equação (11)”, o bloco atingirá o equilíbrio térmico somente no limite em que o tempo tender ao infinito, pois $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_a$. Entretanto, podemos estipular um valor máximo para a diferença entre $T(t)$ e T_a , estabelecendo uma quantidade de tempo praticável e minimizada.

Assumindo τ como a quantidade de tempo tal que $T(\tau) - T_a \leq \frac{1}{10^n} \text{ } ^\circ\text{C}$, com n inteiro positivo, utilizando a “Equação (11)” obtemos a “Desigualdade (13)”:

$$T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-k \cdot \tau} \leq \frac{1}{10^n} + T_a \quad (13)$$

Simplificando a “Desigualdade (13)” e isolando τ , obtemos a “Desigualdade (14)”:

$$\tau \geq \frac{1}{k} \cdot \ln[10^n \cdot (T_0 - T_a)] \quad (14)$$

Se τ em horas não for um número inteiro, consideramos o valor em horas de τ como sendo a próxima hora inteira. Portanto, a “Desigualdade (14)” fornece o tempo necessário para que $T(\tau) - T_a \leq \frac{1}{10^n} \text{ } ^\circ\text{C}$.

4. CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Quando um bloco padrão é colocado em contato com uma superfície, calor é transferido do corpo com temperatura mais alta para aquele com temperatura mais baixa, até que ambos atinjam a mesma temperatura. Nesse momento, diz-se que os dois corpos atingiram o equilíbrio térmico (ÇENGEL, 2006). No mecanismo de condução, a energia térmica é transferida diretamente por meio das interações entre átomos ou moléculas de um meio material.

Sabemos pela “Equação (1)” que $\frac{dT}{dt}$ significa a velocidade de resfriamento do bloco e que esta velocidade será tanto maior quanto maior for a diferença $T - T_a$. Entretanto, a constante de proporcionalidade k é influenciada principalmente por dois fatores, a quantidade de área e os valores de condutividade térmica.

A propriedade que caracteriza a habilidade de um material transferir calor é a condutividade térmica. O calor é transportado nos materiais sólidos tanto por meio das ondas de vibração da rede cristalina, fônons, quanto por elétrons livres. Num bloco padrão feito de metal, o mecanismo eletrônico de transporte de calor é muito mais eficiente do que a contribuição dada pelos fônons, enquanto em um bloco de cerâmica os fônons serão os principais responsáveis pela condutividade térmica (CALLISTER, 2008).

Na “Tabela 1” está apresentada a condutividade térmica de alguns materiais utilizados para fabricação de blocos padrão.

Tabela 1 - Condutividade térmica (adaptado de MITUTOYO, 2009)

Condutividade térmica de blocos padrão (W/m-K)			
Carbide (WC-Co)	Aço (SAE 52100)	Silicon nitride (Si_3N_4)	Cerâmica (ZrO_2)
79,5	54,4	16,7	2,9

Pela “Tabela (1)”, é possível visualizar que blocos metálicos são melhores para condução de calor.

Para a base de apoio dos blocos quando do repouso no período mínimo de estabilização térmica, segue abaixo o “Diagrama 1”, mostrando a condutividade térmica de diferentes materiais.

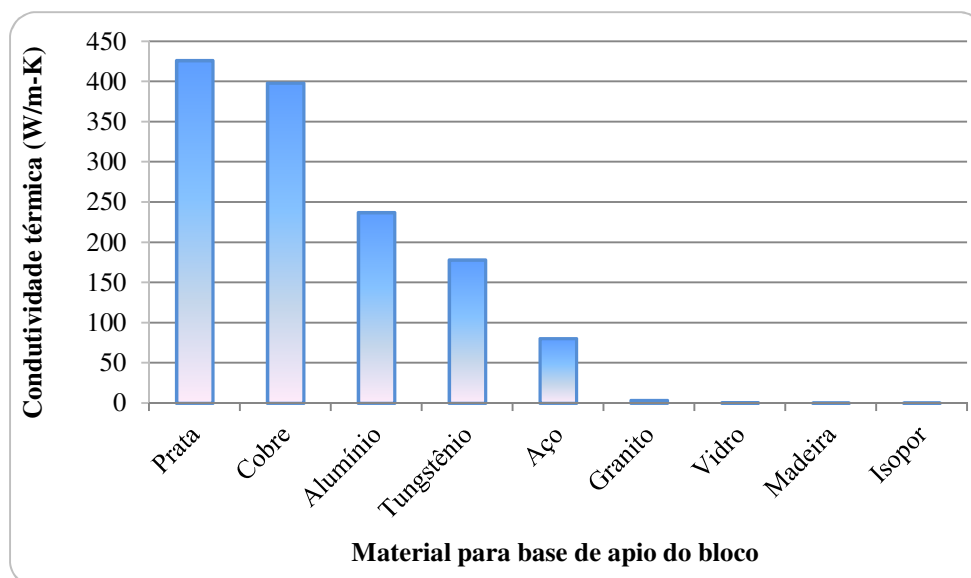


Diagrama 1 - Condutividade térmica da base de apoio (adaptado de CALLISTER, 2008)

Portanto, assim como um bloco de metal vai conduzir mais facilmente calor do que um de cerâmica, convém que quando o bloco estiver em repouso para o equilíbrio térmico dentro do ambiente de calibração seja utilizada uma base metálica.

5. O MÉTODO

Para identificar o menor tempo necessário para o equilíbrio térmico na calibração de blocos padrão, foi estabelecido um método para se aplicar em ambientes com temperatura estável. O método consiste na simulação do recebimento do bloco de um ambiente externo ao laboratório, com temperatura acima do valor de referência de 20 °C, e na medição da temperatura do bloco e do tempo transcorrido após deixar o bloco no ambiente de calibração.

O ambiente de calibração deve estar termicamente equilibrado e dentro dos limites de temperatura estabelecidos pelo observador. O bloco padrão deve ser colocado em uma base plana, com a superfície maior em contato com a base, dando preferência a bases feitas de material com boa condutividade térmica. Nesse momento deve ser medida T_0 . Após transcorrer alguns poucos minutos, medir novamente a temperatura do bloco e calcular o valor de k com a “Equação (12)”. Utilizar a “Equação (14)” para identificar o tempo mínimo.

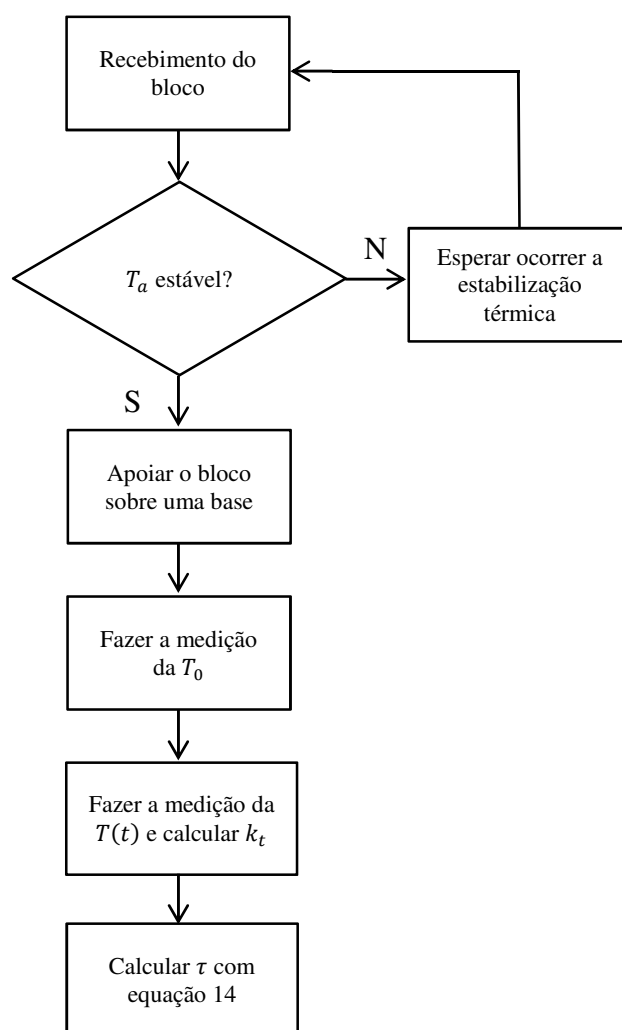


Figura 1 - Representação esquemática do método proposto

Este método experimental é sensível à variação de T_a . Caso T_a seja instável, os resultados não são válidos.

5.1 Validação do método

O teste foi realizado nas dependências do Senai Cetemp, na área dimensional, com $19,5 \leq T_a \leq 20,5^\circ\text{C}$. Utilizando um *datalogger* de temperatura, foram registrados os valores da temperatura do ambiente conforme “Figura 2”, sendo coletados 283 pontos, 1 ponto a cada hora, durante aproximadamente 12 dias.

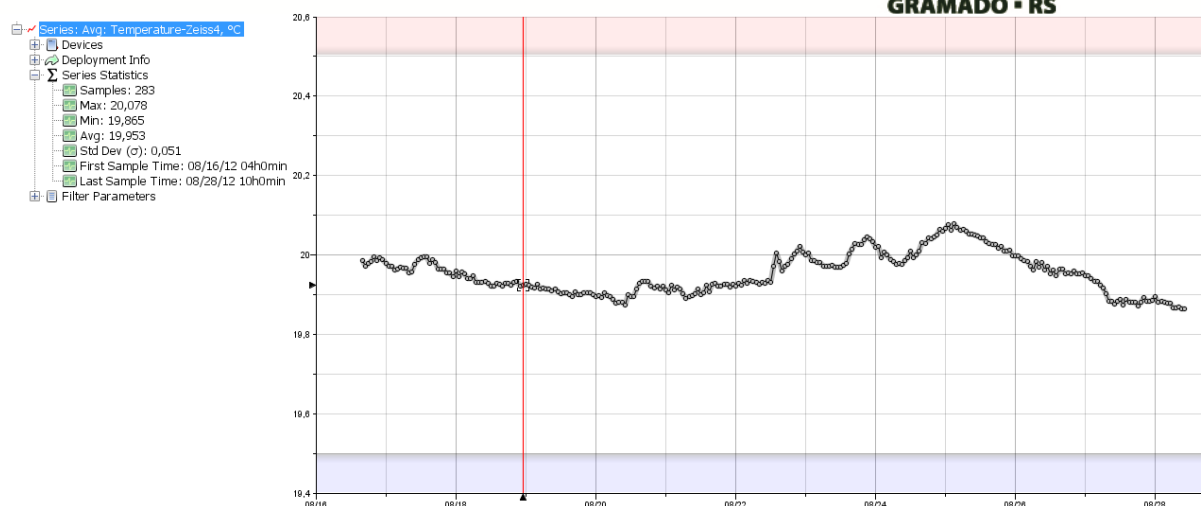


Figura 2 - Gráfico de temperatura da sala de calibração num intervalo de 12 dias

A temperatura média foi 19,953 °C com desvio de padrão de 0,051 °C, atendo ao requisito de ter T_a estável ao longo do tempo.

Para a simulação do recebimento do bloco de um ambiente externo, foi utilizado um forno de secagem de vidrarias de laboratório, “Figura 3”, para que fosse possível controlar a temperatura de recebimento do bloco.



Figura 3 - Forno utilizado para aquecimento controlado do bloco de teste

O forno foi regulado para 40 °C, onde o bloco foi depositado por 3 horas. O bloco escolhido é de aço SAE 52100 com 100 mm de comprimento nominal e foi colocado com o lado maior em contato com uma base plana, sendo colado o sensor de temperatura no lado maior oposto ao contato com a base, conforme “Figura 4”.



Figura 4 - Bloco de aço na base de granito com o sensor de temperatura

Apesar do conhecimento do alto valor de condutividade térmica dos metais, foi escolhida para a base de apoio do bloco, a mesa de granito de uma máquina de medição por coordenadas.

Na obtenção dos dados da temperatura, utilizando o *datalogger* de temperatura, foram coletados aproximadamente 2300 pontos em intervalos de 10 s, com uma resolução de 0,001°C. Estes dados serão os valores de referência para comparação com os resultados obtidos pela “Equação (11)”. Os pontos foram exportados para o software *Excel*, conforme “Figura 5”.

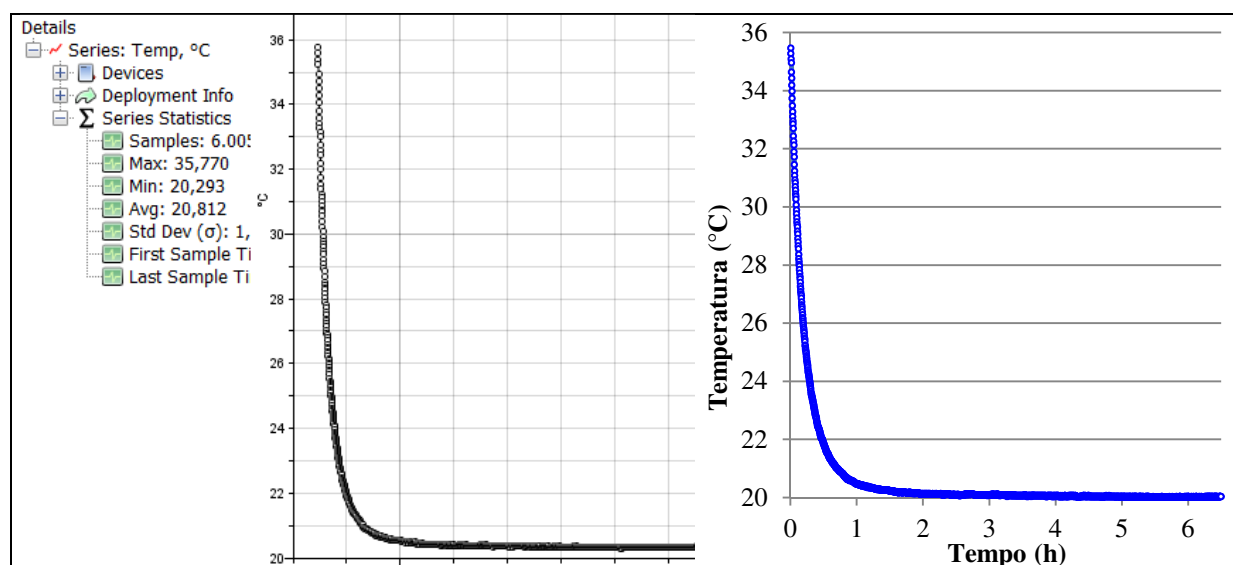


Figura 5 - Temperatura do bloco no software do *datalogger* e exportado para *Excel*

A temperatura baixou rapidamente nos primeiros instantes, e após tendeu ao comportamento assintótico.

Utilizando a “Equação(12)”, foi calculado um valor para a constante k com os seguintes dados: $T_0 = 35,470$ °C; $T_a = 20,010$ °C; $t = 300$ s; $T(300) = 30,069$ °C

$$k_t = \frac{1}{t} \ln \left[\frac{(T_0 - T_a)}{(T(t) - T_a)} \right] \cong \frac{0,00143}{s}$$

Com o valor da constante k , substituindo os dados na “Equação (11)” foi possível determinar gráfico da função temperatura, onde a única variável independente é o tempo:

$$T(t) = 20,010[^\circ\text{C}] + 15,46[^\circ\text{C}] \cdot e^{-\frac{0,00143}{[\text{s}]} \cdot t[\text{s}]} \quad (15)$$

No “Diagrama2”, estão plotadas a curva de referência obtida com o *datalogger* e a curva gerada a partir da “Equação (15)”.

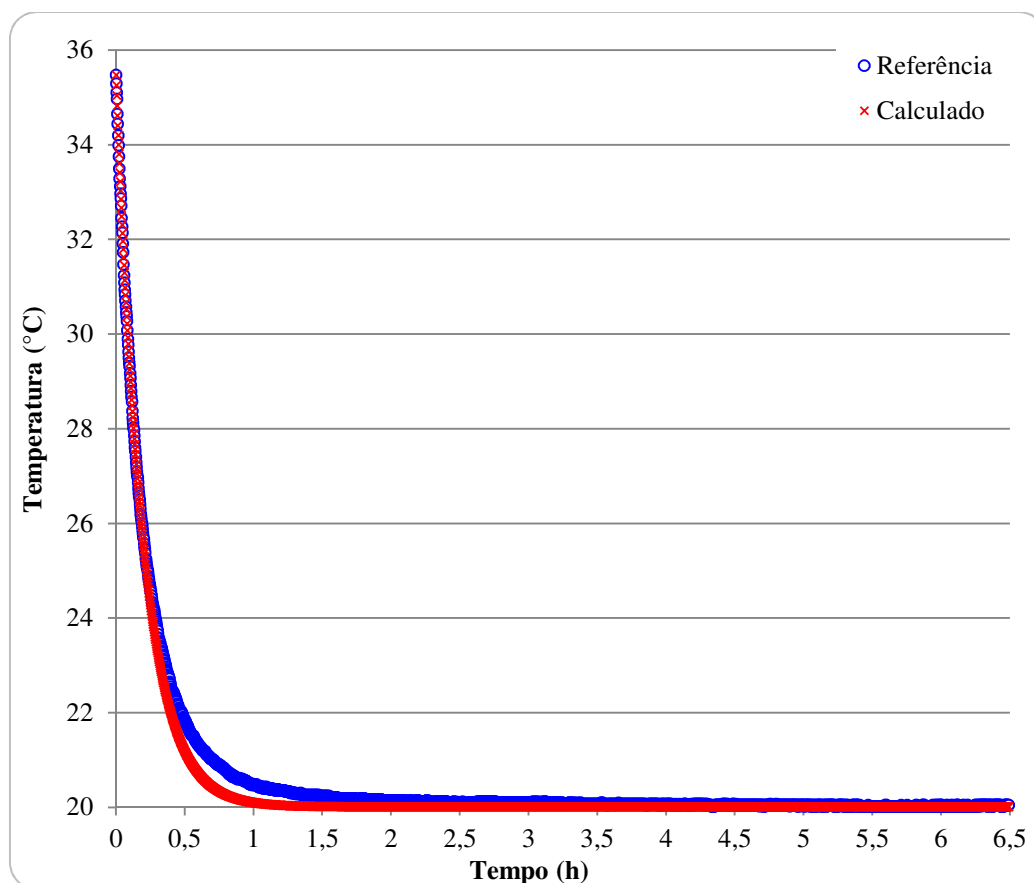


Diagrama2 - Temperatura de referência e a curva gerada por

$$T(t) = 20,010[^\circ\text{C}] + 15,46[^\circ\text{C}] \cdot e^{-\frac{0,00143}{[\text{s}]} \cdot t[\text{s}]}$$

Visualmente, existiu boa compatibilidade entre a curva modelada e os dados de referência. O “Diagrama 3” ajuda a visualizar as diferenças entre os valores calculados e a curva de referência.

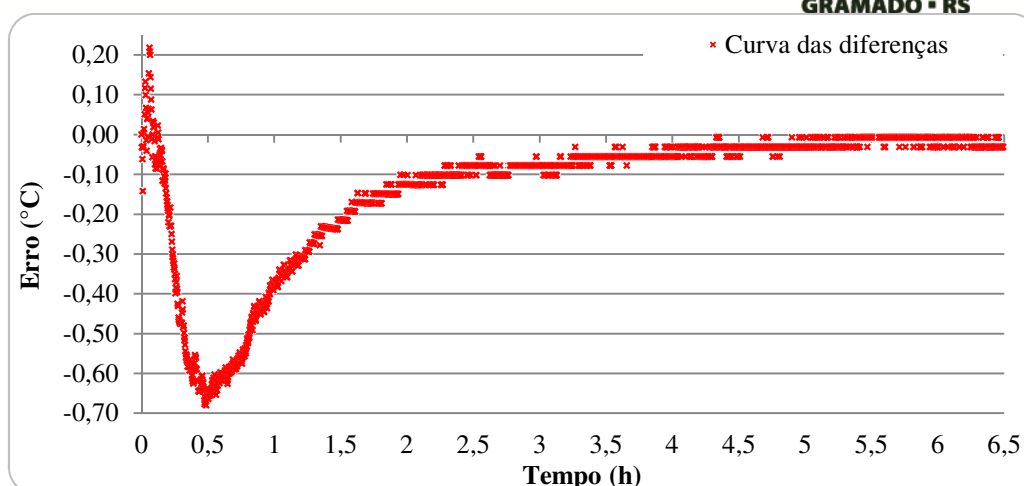


Diagrama 3 - Gráfico da diferença entre valor o calculado e a referência em cada ponto

Até 0,2 h a diferença máxima foi de $-0,221^{\circ}\text{C}$. Para $(0,2 < t < 0,5)$ h, a diferença máxima aumentou para até $-0,681^{\circ}\text{C}$. Para $t > 0,5$ h, a diferença começou a diminuir, tendendo a zero com o passar do tempo, chegando a aproximadamente $-0,101^{\circ}\text{C}$ em apenas 2 h depois do início. Logo, nota-se a compatibilidade da curva calculada, tendo em vista que as diferenças são aproximadamente menores que $-0,101^{\circ}\text{C}$ para todo o tempo maior que 2 h.

Apesar de apenas um único valor de k ser necessário para modelar a curva, foi calculado o valor de k para cada ponto do tempo, sendo mostrado no “Diagrama 4”.

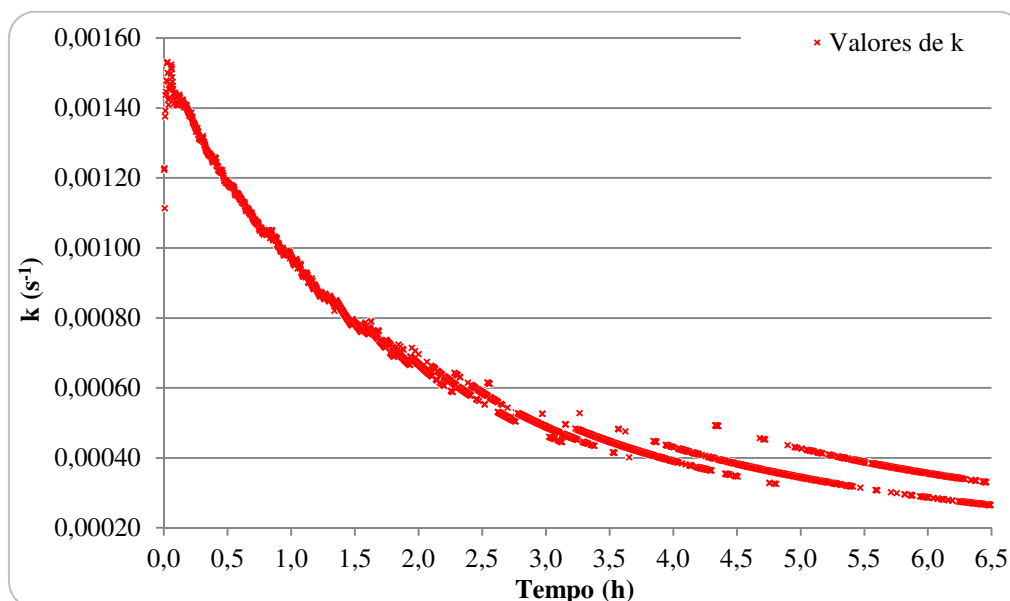


Diagrama4 - Valores de k no tempo

Levando em consideração a “Equação (12)”, o valor de k tende a zero à medida que o tempo aumenta, ou seja, quando $T(t) \rightarrow T_a$. Logo, os valores de k são compatíveis para uso no modelo matemático apenas quando $\frac{dT}{dt}$ é relativamente alta, isto é, a medição de k_t deve ser realizada poucos minutos depois do tempo zero.

5.2. Cálculo do tempo mínimo

Utilizando a “Equação (14)” é possível identificar o tempo mínimo para que a temperatura do bloco fique próxima de T_a . Admitindo uma diferença entre a temperatura do bloco e a temperatura do ambiente $\leq 0,01$ °C, $T(\tau) - T_a \leq \frac{1}{10^2}$, utilizando os dados $T_0 = 35,470$ °C, $T_a = 20,010$ °C e $k = 0,00143$ s, obtemos o seguinte valor para τ :

$$\tau = \frac{1}{k} \cdot \ln[10^2 \cdot (T_0 - T_a)] = \frac{1}{\frac{0,00143}{[s]}} \cdot \ln \left[\frac{100}{[^\circ\text{C}]} \cdot (35,470 - 20,010)[^\circ\text{C}] \right] \cong 5135 \text{ s} \cong 1,42 \text{ h}$$

Extrapolamos τ em horas para o próximo inteiro superior, $\tau = 2$ h (7200 s). Assim,

$$T(\tau) \Rightarrow T(7200[s]) = 20,010[^\circ\text{C}] + 15,46[^\circ\text{C}] \cdot e^{-\frac{0,00143}{[s]} \cdot 7200[s]} \cong 20,01 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Contudo, a temperatura de referência em 2 h é de 20,136 °C. Portanto temos um erro de aproximadamente $| -0,13 |$ °C, valor que é relativamente aceitável para ser utilizado em um balanço de incerteza (JCGM, 2008), dependendo dos requisitos de incerteza do laboratório de calibração.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo apresentou uma situação ocorrida em uma aula de equações diferenciais em que um aluno levantou um problema real, advindo de sua prática de trabalho: como determinar um tempo mínimo, com boa margem de segurança, para que blocos padrão atinjam o equilíbrio térmico com o ambiente de um laboratório de metrologia?

Tal questionamento decorre do fato de que as recomendações encontradas na literatura sobre a menor quantidade de tempo necessária para ocorrência do equilíbrio são baseadas mais na experiência prática e bom senso do que em estudos sistemáticos, sendo comum que os blocos repousem no laboratório pelo período mínimo de uma noite inteira ou mesmo por até 24 horas.

O problema motivou ambos, aluno e professor, a desenvolverem um método experimental para identificar a menor quantidade de tempo a ser despendida ao equilíbrio térmico, utilizando como ferramenta a lei de resfriamento de Newton e o princípio da transferência de energia térmica pelo mecanismo de condução.

A lei de resfriamento de Newton é descrita por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que pode ser resolvida analiticamente pelo método de separação de variáveis.

Na implementação do método, foi utilizado como base para apoio e transferência de calor pelo mecanismo de condução, a mesa de granito de uma máquina de medição por coordenadas, sendo que uma base metálica apresentaria tempos ainda menores. Os resultados da validação do método demonstram total compatibilidade dos valores modelados com a equação diferencial e os valores de referência obtidos com o *datalogger*.

O método necessita que a temperatura do ambiente seja estável e é sensível aos valores de k , sendo estes compatíveis para uso no modelo matemático apenas quando $\frac{dT}{dt}$ é relativamente alta. Em outras palavras, a medição de k_t deve ser realizada poucos minutos depois do tempo zero. De qualquer maneira, o modelamento apresentado do fenômeno, segundo a lei de

resfriamento de Newton, é apenas uma aproximação da situação real, pois não se leva em consideração, por exemplo, a transferência de calor por radiação.

O método pode ser aplicado para outros padrões e instrumentos da área dimensional. Otimizações no método apresentado neste trabalho, como por exemplo, a definição de um intervalo de tempo ideal para o cálculo da constante k , estão sendo planejadas e serão avaliadas futuramente, podendo inclusive ser desenvolvidas como projeto de iniciação científica.

REFERÊNCIAS

CALLISTER, W. D. **Ciência e engenharia de materiais – Uma introdução**, 7º ed., capítulo 17, p. 531-537, 2008.

ÇENGEL, Y. A. **Termodinâmica**, p. 14-15, 5º ed., 2006.

DOIRON, T.; BEERS, J. **The Gauge Block Handbook**, NIST, 2005.

JCGM, **JCGM 100:2008**, anexo H1, 1º ed., setembro de 2008.

MITUTOYO. **Catálogo de produtos**, versão USA, p. E-3, 2009.

QUINN, T. J. **Practical realization of the definition of the metre**, Metrologia, Vol. 36, No. 3, p. 211-244, 1999.

TESA. **Manual do comparador de blocos padrão**, p. 47-49, 1991.

UNITED KINGDOM ACCREDITATION SERVICE. **Laboratory Accommodation and Environment in the Measurement of Length, Angle and Form**, 3º ed., dezembro de 2008.

ZILL, Dennis G., **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**, 9º ed., 2011.

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THE CALIBRATION OF THE GAUGE BLOCKS IN A METROLOGY LABORATORY

Abstract: *This present article deals of the problem, raised by a student during class, of determining the minimum time required to thermal equilibrium of length gauge block in a metrology laboratory. Describes the method applied to solve the problem, using Newton's law of cooling and his solution, from concepts used in the discipline of differential equations. To obtain the temperature data, we used a datalogger with specific software. Data were exported to Excel software, and compared the modeling performed with the use of differential equations of first order. The results showed full compatibility between the mathematical model and the reference data obtained with the datalogger, enabling the use of a systematic method to identify the minimum time required for the thermal equilibrium.*

Key words: *Gauge blocks, Thermal equilibrium, Newton's Law of Cooling, Differential equations, Separable variables.*