



ANÁLISE DO CONCEITO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Ana Luísa C. Furtado – analuisacf@gmail.com

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – Unidade Itaguaí
23810-000 – Itaguaí – Rio de Janeiro

Antonio C. P. Lisboa – antonio.chicharo@yahoo.com.br

Bruna da S. Machado – bruna.smachado@hotmail.com

Francisco Carlos N. da Silva – fconipo@gmail.com

João Marcelo M. S. Coutinho – joaoklr@hotmail.com

Mariana C. Folena – marianafolena@hotmail.com

Nicolas do N. Cavalcante – nicocaval.engmec@gmail.com

***Resumo:** O trabalho pretende fornecer aplicação de um objeto matemático na mecânica. Foi feito um estudo de caso no CEFET-RJ para que as dificuldades encontradas pelos alunos em matemática fossem conhecidas. Analisamos os conceitos matemáticos a luz das teorias de Obstáculo Epistemológico (Bachelard, 1938) e Imagem de Conceito (Tall&Vinner, 1981). Na nossa pesquisa, o tópico Sistemas de equações Lineares foi o que teve maior disparidade entre entendimento e conhecimento de aplicação e, por isso, escolhemos estudar o Sistema massa mola.*

***Palavras-chave:** Obstáculo epistemológico, Imagem de conceito, Sistemas de equações lineares, Sistema massa mola*

1. INTRODUÇÃO

As disciplinas de Matemática no ensino superior têm sido alvo de estudos recentes de muitos educadores. As orientações curriculares oficiais no Brasil propõem que a formação do engenheiro produza fundamento capaz de suprir as necessidades de atuação da Engenharia.

Desejamos colaborar para o ensino da Matemática e da própria Engenharia fornecendo alguns dados que possibilitem entender melhor como os alunos sentem os conteúdos dados. Pesquisamos dentre os alunos de Engenharia do CEFET-RJ das unidades de Itaguaí e Maracanã, quais tópicos das disciplinas de Álgebra Linear, Cálculo, Estatística e Equações Diferenciais Ordinárias possuem maiores entraves no seu aprendizado através de um questionário. Também os questionamos sobre as aplicações na Mecânica que conhecem e analisamos todos estes dados, escolhendo assim um tópico de maior relevância e expondo uma de suas aplicações em um determinado objeto da Engenharia Mecânica.



2. BASES METODOLÓGICAS

Para guiar o nosso estudo, analisamos os conceitos da Matemática à luz das teorias de Obstáculo Epistemológico (Bachelard, 1938) e Imagem de Conceito (Tall & Vinner, 1981).

2.1. Obstáculos epistemológicos

De maneira simplificada, os Obstáculos Epistemológicos podem ser entendidos como analogias, imagens ou metáforas que atuam como uma “barreira” para o entendimento de conceitos científicos e foi descrita inicialmente pelo filósofo francês Gastão Bachelard, na obra *A Formação do Espírito Científico*, publicada em 1938. Estes obstáculos podem dificultar o aprendizado de conceitos científicos.

De acordo com Bachelard, os primeiros obstáculos são aqueles provocados por primeiras experiências, quando estas são realizadas ainda sem maiores reflexões e críticas. O impacto da primeira impressão pode ofuscar a razão na busca de uma maior clareza das ideias envolvidas, visto que um conceito anterior mal estabelecido precisa dar espaço para um novo conceito mais completo.

Certos conhecimentos, quando defendidos por aqueles que os detêm, impedem a instalação de um novo saber, com o antigo conhecimento atuando como uma espécie de barreira à realização de uma nova aprendizagem, proporcionando uma estagnação da evolução do conhecimento até o momento em que ocorrer a quebra dessa barreira.

A generalização de uma ideia pode se transformar num problema quando ela ainda está presa ao entendimento pré-reflexivo sem uma ter uma análise crítica e científica. Relacionando obstáculos epistemológicos com a Matemática, temos bons exemplos de ocorrências ao longo do estudo científico, como o caso da generalidade, que é um fator que acompanha o estudante desde o início no ensino fundamental, com as operações, que passam a poder ser realizadas com números positivos e negativos.

Quando só se trabalhava com números naturais, a soma de dois números não nulos é sempre um número maior do que as parcelas. Já quando estivermos no universo dos Números Inteiros acontece, por exemplo, que $-5+2=-3$. A criança normalmente aprende a fazer contas de adição e subtração com palitinhos ou dedos, sendo difícil transpor esta prática para as operações de números inteiros.

2.2. Imagem de conceito e definição de conceito

A noção de Imagem de conceito foi definida pela primeira vez em 1981, por David Tall e Shlomo Vinner. A Imagem de conceito é definida como:

[...] a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais além de processos e propriedades associadas. É construída através de anos de experiências de todos os tipos, mudando quando o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.

(TALL & VINNER, 1981)

A partir desta definição é possível observar que a Imagem de conceito não pode ser associada a apenas uma menção formal ou uma Imagem de conceito intrinsecamente



associada a um único conceito, sendo composta por atributos de distintas naturezas e construída ao longo dos anos pelas experiências particulares do indivíduo.

A Imagem de conceito de um indivíduo é mutável onde se pode acrescentar remover ou alterar ideias e atributos. Esta base metodológica pode ser bem vasta, podendo conter elementos visuais e experiências de natureza matemática e/ou cotidianas, por exemplo, Tall cita que a imagem de conceito de uma função real é tudo aquilo que está na mente de uma pessoa, sobre determinado assunto.

A Imagem de conceito nem sempre é compatível com a definição formal do referido conceito. Como por exemplo, a definição de conceito encontrada em cursos iniciais de geometria sobre retângulo, onde se tem a seguinte definição: “um retângulo é um quadrilátero com quatro ângulos retos, lados opostos iguais e lados consecutivos diferentes”. Dessa definição são geradas diversas Imagens de conceito contendo propriedades matemáticas como “todo retângulo possui lados opostos paralelos”, ou “a área de um retângulo é igual ao produto dos comprimentos de seus lados”. Porém, esta Imagem de conceito encontra problemas, uma vez que as definições de conceito se confrontam.

Outro estudante pode ser capaz de recitar a definição correta de que um retângulo é um quadrilátero equiângulo, sem ter conhecimento das propriedades matemáticas da figura geométrica, ou construir uma imagem de conceito com propriedades incorretas como todo retângulo possui diagonais perpendiculares entre si.

Por mais que a definição de conceito faça parte da imagem de conceito, alguns autores – como Vinner e Cornur – chamam a atenção para a independência entre imagem de conceito e definição de conceito. Pois um aluno pode ter uma imagem de conceito, e após uma aula, adquirir uma definição de conceito que não ficou bem esclarecida, mas mesmo assim conseguir resolver exercícios de uma boa maneira. E quando lhe fosse solicitado que definisse tal conceito, o aluno poderia citar a definição de conceito adquirida ou a pessoal, mesmo estando com a imagem de conceito inicial na mente.

A comprovação da independência entre Imagem de Conceito e Definição de conceito pode ser retirado do fato de muitos alunos dos cursos de graduação realizar exercícios de limites e obterem assim bons resultados nas avaliações, sem entender sua a definição de conceito formal. Fica evidente que não é necessário conhecer a melhor definição do conceito de limite para solucionar diversos problemas envolvendo o assunto, mas é preciso estar ciente de seus atributos e propriedades, demonstrando deste modo, que o estudante pode possuir uma imagem de conceito rica, sem, entretanto, definir de modo correto aquele conceito. Mesmo assim, uma definição de conceito formal (matematicamente) é benéfica para o enriquecimento da imagem e contribui de forma relevante para o desenvolvimento cognitivo e para aprendizagem do aluno.

Esta mesma independência entre imagem e definição de conceito demonstra como essas duas partes podem ser em algum momento inconsistente e por isso podem entrar em conflito. Mas além do possível conflito existente entre definição e imagem de um conceito, dentro da própria imagem de conceito pode haver incoerências, ou seja, um atributo da imagem de conceito pode não concordar com outra parte dessa mesma imagem, isso devido ao fato, de a imagem de conceito ser um conjunto variado de propriedades, processos e outros elementos associados ao conceito.

Definem-se as partes geradoras de conflito dessa imagem de conceito como fatores de conflito potenciais. Potencial no sentido de existir, mas não necessariamente estar ativado no processo cognitivo, pois o conflito se inicia no instante que as porções inconsistentes são evocadas. Assim, quando dois elementos de uma mesma imagem de conceito evocados se contradizem, temos um fator de conflito cognitivo. Em outras palavras, o fator de conflito cognitivo é o fator de conflito potencial da imagem que foi demandado.



Tall e Vinner afirmam que, embora possam gerar obstáculos quando ativados, é necessário que fatores de conflito potencial se atualizem como fatores de conflito cognitivo, para que possam assim ser conscientemente entendidos e tratados.

O amadurecimento do aprendizado do aluno ocorre, exatamente, quando esses fatores de conflito potenciais são evocados e convertidos em fatores de conflitos cognitivos. Essa mudança, inevitavelmente, traz obstáculos para a formação de uma imagem de conceito sólida. No entanto, não se devem desencorajar esses conflitos, pois é a superação desses obstáculos que possibilita ao aluno chegar a um melhor nível de compreensão.

3. ELABORAÇÃO DO QUESTIONÁRIO

O questionário foi elaborado no intuito de criar um panorama sobre o ensino de matemática dos alunos da Engenharia e ver o quão eficaz é a contextualização desse conhecimento dentro das áreas específicas da graduação.

Elaboramos o questionário nos dividindo em três duplas e analisamos o conteúdo das disciplinas Estática, Resistência dos Materiais e Dinâmica para sinalizarmos quais conceitos matemáticos cada disciplina utilizava e escolhemos oito tópicos, que são: Sistemas Lineares, Produtos Interno, Produto Vetorial, Produto Misto, Matrizes, Quádricas, Limites de Funções Reais, Derivadas, Integrais e Equações Diferenciais Parciais e Séries.

Uma pergunta feita para cada um dos oito tópicos foi se o aluno conhece aplicação do conteúdo na disciplina. Se sim, pedimos que a citasse brevemente.

De acordo com os referenciais de Imagem de conceito e obstáculo epistemológico, pensamos em cinco níveis de compreensão de um conceito. Estes níveis são variáveis qualitativas, que foram numeradas para facilitar a aplicação dos questionários. Os níveis são:

1. Compreende bem e é capaz de resolver questões de Matemática complexas e questões aplicadas (Física/Engenharia);
2. Não compreendo tão bem o conceito, mas consigo aplicá-lo e resolver questões com êxito;
3. Compreendo o conceito, mas tenho dificuldade em identificá-lo em questões;
4. Já estudei, mas atualmente lembro-me de partes isoladas;
5. Nunca entendi bem, e tenho dificuldade em resolver questões.

Os resultados destes níveis de compreensão formarão o panorama de ensino desejado.

O questionário foi aplicado a 41 alunos do curso de Engenharia Mecânica em 2012, sendo que todos estão cursando matérias do 4º ou 5º período (não levamos em conta o ano do ingresso). Dos alunos pesquisados, 16 possuem curso técnico e 12 trabalham.

Podemos visualizar o resultado sobre o entendimento dos conteúdos no gráfico 1 e no gráfico 2, o conhecimento das aplicações dos objetos matemáticos na Mecânica:

Gráfico 1: Resultados da pesquisa.

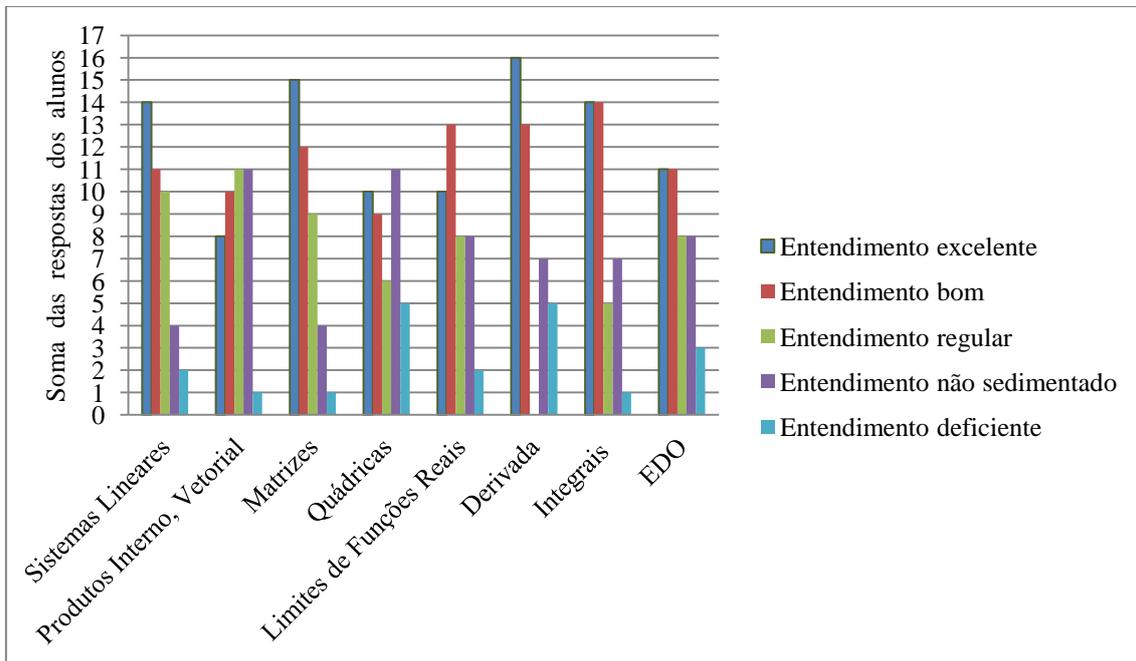
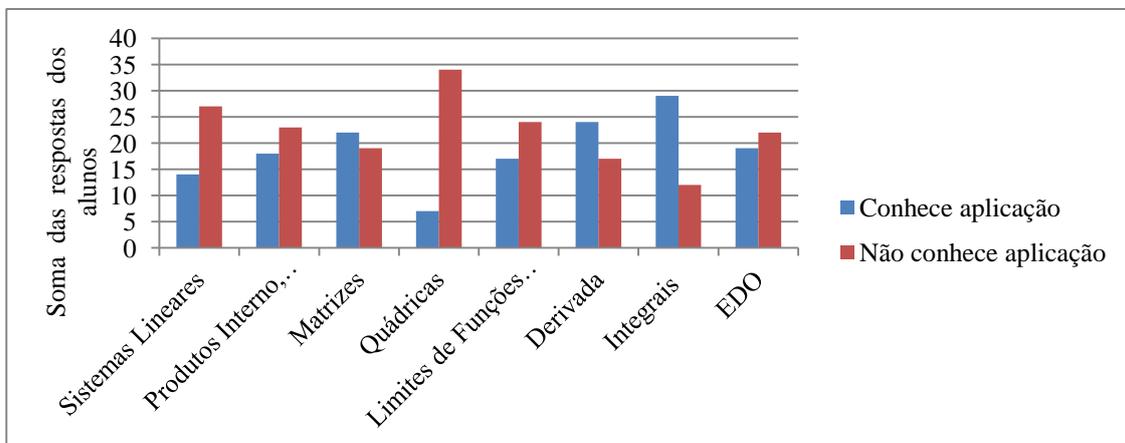


Gráfico 2: Conhecimento de aplicação na Mecânica.



Avaliando os gráficos, podemos perceber que há uma correspondência entre a percepção das matérias que possuem os melhores níveis de entendimento (já que se trata de uma autoavaliação) e as matérias com resposta positiva para o conhecimento de aplicação na Mecânica. O tema com maior índice de entendimento deficiente é Quádricas e este mesmo conceito é o que possui menos aplicações conhecidas pelos alunos. Derivada, Matrizes, Integral e Sistema de Equações Lineares são os temas com melhores níveis de entendimento. Dos quatro temas, os três primeiros são os que apresentam maior conhecimento de aplicações por parte dos alunos. Sistema de equações lineares que é contraditório com os gráficos, pois embora os alunos julguem entendê-lo bem, apontam para o desconhecimento de sua aplicação. É perceptível, observando os dois gráficos em barras, que os assuntos com aplicação mais difundida para os alunos são também os assuntos nos quais os estudantes consideram ter maior entendimento. "Integrais", "Derivada" e "Matrizes", apesar de não



serem temáticas simples, possuem conceitos que serão evocados em disciplinas futuras e, assim, sua relevância e utilidade se tornam mais evidentes.

Além disso, pelo fato de serem conceitos recorrentes e solicitados rotineiramente na resolução de exercícios é bem difícil que esses assuntos possuam fatores de conflitos potenciais graves, já que os elementos da imagem de conceito dos estudantes sobre estes temas estão em constante renovação. Outra possível consequência benéfica dessa interação entre conhecimento da aplicação e a melhora do nível de entendimento é a harmonização entre a definição do conceito e os elementos da imagem de conceito.

Logo, podemos notar que no geral existe uma relação entre o entendimento dos temas e o conhecimento de suas aplicações.

De acordo com o gráfico 2, um dos temas que teve menor conhecimento de aplicação na Mecânica foi sistemas lineares, sendo esse tema largamente aplicado durante a vida estudantil do aluno de Engenharia. O primeiro contato com sistemas de equações lineares ocorre no 7º ano do Ensino Fundamental, onde o aluno trabalha com os métodos de adição, comparação e substituição com duas equações e duas incógnitas. Logo, é um assunto antigo para o aluno.

A Álgebra Linear é uma ferramenta presente em diversas outras áreas do conhecimento matemático. Esperamos que o nosso trabalho contribuisse com o acervo de aplicações de Sistema de Equações Lineares na Engenharia Mecânica. Iremos tratar do Sistema massa mola, não amortecido, que tem grande utilização em modelo de análise de vibrações.

4. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A modelagem de Sistemas Lineares tem por objetivo de estudo construir modelos matemáticos desenvolvidos a partir de conceitos físicos, para descrever sistemas mecânicos simples, onde a fundamentação na relação causa e efeito são proporcionais.

4.1. Aplicação de Sistemas Lineares

Sistema mecânico massa mola não Amortecido (com um grau de liberdade)

Para descrever o sistema massa mola, é necessária definição dos seguintes conceitos:
2ª Lei de Newton: Uma massa (m) sob a ação da resultante de forças externas (F_{ext}) sofre uma aceleração (a) que tem a mesma direção e sentido da força e um módulo diretamente proporcional à força. É expressa matematicamente na forma.

$$\vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

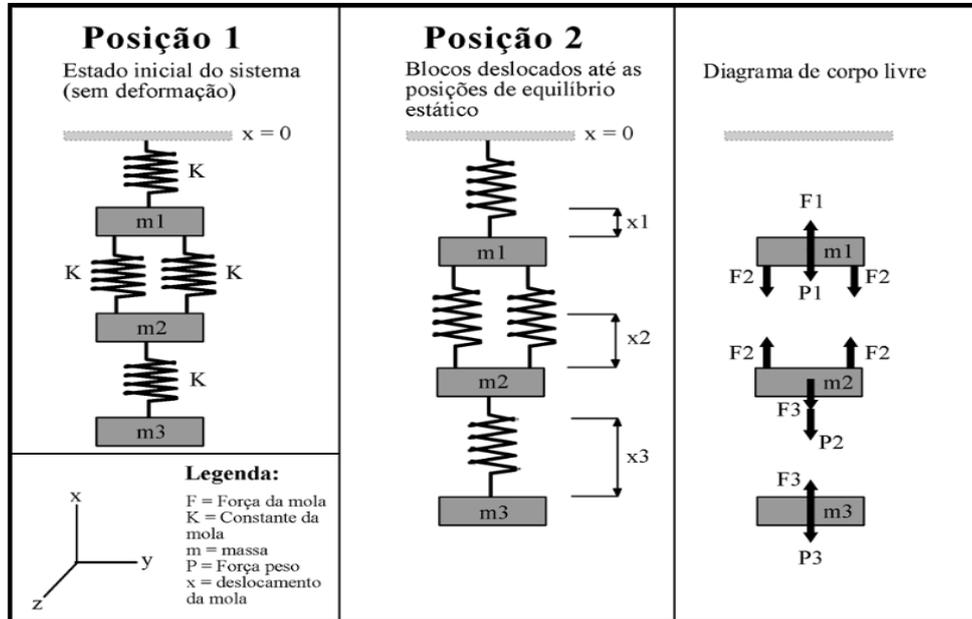
Lei de Hooke (Deformação Elástica)

No regime elástico há uma dependência linear entre força e deformação, se uma massa está interagindo com uma mola elástica, a força da mola (F_m) é relacionada à deformação ($x = l - l_0$) da mola pela equação abaixo, onde a rigidez da mola (K) é a constante de proporcionalidade e esta deformação pode ser por tração ou compressão.

$$F_m = K \cdot x \quad (2)$$

4.2. Solução pelo método analítico de Problema Aplicado na Engenharia

Figura 2: Montagem do sistema massa mola não amortecido e diagrama de corpo livre.



Utilizando a 2ª lei de Newton (equação do movimento) e a lei de Hooke (deformação elástica) conseguimos obter matematicamente as equações que regem todo o sistema massa mola. Pela condição de equilíbrio estático onde não existe movimento, podemos escrever as equações da seguinte forma.

Força exercida pela mola elástica de peso desprezível nos blocos.

$$F_1 = Kx_1 \quad (3)$$

$$F_2 = K(x_2 - x_1) \quad (4)$$

$$F_3 = K(x_3 - x_2) \quad (5)$$

Força devido ao peso dos blocos.

$$P_1 = m_1 \cdot g \quad (6)$$

$$P_2 = m_2 \cdot g \quad (7)$$

$$P_3 = m_3 \cdot g \quad (8)$$

Diagrama de corpo livre do sistema massa mola:

Bloco de massa m_1 :

$$\sum F_x = 0 \quad (9)$$

$$F_1 - 2F_2 - P_1 = 0 \quad (10)$$



$$3Kx_1 - 2Kx_2 = m_1g \quad (11)$$

Bloco de massa m2:

$$\sum F_x = 0 \quad (12)$$

$$2F_2 - P_2 - F_3 = 0 \quad (13)$$

$$-2Kx_1 + 3Kx_2 - Kx_3 = m_2g \quad (14)$$

Bloco de massa m3:

$$\sum F_x = 0 \quad (15)$$

$$F_3 - P_2 = 0 \quad (16)$$

$$Kx_3 - Kx_2 = m_3g \quad (17)$$

Sendo assim, o sistema de equações lineares que modelam o problema de engenharia do sistema massa mola segue:

$$\begin{cases} 3Kx_1 - 2Kx_2 = m_1g \\ -2Kx_1 + 3Kx_2 - Kx_3 = m_2g \\ Kx_3 - Kx_2 = m_3g \end{cases} \quad (18)$$

O sistema linear formado pela equação (14) pode ser escrito na forma matricial $K \cdot x = F$, onde a matriz K é a matriz das constantes de rigidez das molas, $K = \begin{bmatrix} 3K & -2K & 0 \\ -2K & 3K & -K \\ 0 & -K & K \end{bmatrix}$, a matriz x é a matriz de deslocamento do bloco em relação ao estado inicial, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e a matriz F é a matriz devido ao peso da massa de cada um dos blocos do sistema, $F = \begin{bmatrix} m_1g \\ m_2g \\ m_3g \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 3K & -2K & 0 \\ -2K & 3K & -K \\ 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1g \\ m_2g \\ m_3g \end{bmatrix} \quad (19)$$

A solução deste sistema é simples e pode ser feita através do escalonamento, estudado tanto no Ensino Médio, quanto nos cursos de Álgebra Linear. Para sistemas maiores podemos usar recursos computacionais.



5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observamos que os alunos de um modo geral não conhecem bem as aplicações dos objetos matemáticos em sua futura área de atuação (Engenharia Industrial Mecânica). Como o próprio currículo exige, o ensino da Matemática (e das demais disciplinas) deve ser ministrado de modo contextualizado, colaborando com a sólida formação teórica, básica, profissionalizante e específica necessária ao desenvolvimento das competências do profissional no exercício da engenharia e propiciando uma educação continuada. Logo, fornecemos indícios de que isto não foi alcançado plenamente.

Nosso trabalho tem como desdobramentos pesquisar aplicações para os tópicos restantes presentes na pesquisa, a elaboração de um novo questionário mais completo e seguido de entrevistas para analisarmos os dados qualitativamente, a criação de um software que auxilie o ensino de sistemas lineares de forma interativa e por fim, a divulgação do trabalho numa plataforma online acessível a estudantes de engenharia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. *Álgebra linear com aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BACHELARD, G. *La formation de L'esprit scientifique*. Paris, 1938.

GIRALDO, Victor. *Descrições e conflitos computacionais: O caso da Derivada*. 221f. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2004.

HALLIDAY, Resnick. *Fundamentos de Física*. 8. Ed. vol1 mecânica - LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2009. p. 95-106; 162-163.

LAMIN, Maria. UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. *Resolução de problemas modelados com sistemas de equações lineares*, 2000. Monografia (graduação).

PESCADOR, A.; POSSAMAI, J.P.; POSSAMAI, C.R. *Aplicação de Álgebra Linear na Engenharia*. Anais: XXXIX – Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. Santa Catarina: FURB, 2011.

Hibbeler, R. C. *Mecânica para Engenheiros - Dinâmica*; 8ª edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, 1999.

TALL, D. & VINNER, S. 1981. *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169.



CONCEPTS OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS IN MECHANICAL ENGINEERING COURSE ANALYSES

Abstract: *This paper intends to provide a mathematic object application on mechanics. A case study was made at CEFET-RJ, in order that the students' difficulties in mathematics could've been known. We analyzed the mathematics concepts through the light of the Epistemological Obstacle (Bachelard,1938) and Concept Image (Tall&Vinner) theories. On our research the subject Systems of linear equations, was the one that had the most disparity between understanding and knowing an application, and for this reason we chose to study the spring-mass system.*

Key-words: *Epistemological Obstacle, Concept Image, Systems of Linear Equations, Mass Spring System*