



## IDENTIFICAÇÃO POR ESPAÇOS DE ESTADOS DE UM MÓDULO SERVO-MECANISMO DIDÁTICO

**Vlademir Aparecido Freire Junior** – vlad\_freire@hotmail.com

**Alessandro do Nascimento Vargas** – avargas@utfpr.edu.br

**Cristiano Marcos Agulhari** – agulhari@utfpr.edu.br

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Avenida Alberto Carazzai, 1640 - Centro

86300-000 – Cornélio Procópio - Paraná

**Resumo:** *Este artigo apresenta um procedimento de identificação de um módulo servo-mecanismo didático 2208 da Datapool Eletrônica Ltda, com intuito de se obter a representação do sistema por espaços de estados. A partir do procedimento apresentado, que assume que todos os estados de um sistema são mensuráveis, é possível obter a representação de estados do sistema, que fornece as características internas e informações detalhadas dos processos, diferentemente dos métodos clássicos de identificação. Tal procedimento tem sido usado para proporcionar aos alunos dos Cursos de Engenharia Elétrica e Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio, uma visão de conceitos utilizados em estratégias de Controle Moderno na prática. Tal representação possibilita vasta aplicabilidade em diversas áreas tais como: análise e controle de sistemas lineares e não-lineares, sistemas invariantes no tempo e variantes no tempo, sistemas SISO (Single-Input, Single-Output) e MIMO (Multiple-Inputs, Multiple-Outputs).*

**Palavras-chave:** *Identificação de Sistemas, Espaço de Estados, Variáveis de Estado, Servo-mecanismo.*

### 1. INTRODUÇÃO

A evolução e utilização de novas tecnologias no mercado industrial têm provocado uma transformação na sociedade, que cada vez mais se torna uma sociedade baseada na informação e no conhecimento. Neste contexto, é reconhecido que os estudantes aprendem melhor pela aplicação dos conceitos aprendidos em sala de aula. Dessa forma, o melhor aprendizado está relacionado com a integração da teoria com a prática (AMARAL *et al.*, 2011).

A aplicação de conceitos teóricos na prática através de utilização de módulos educacionais é de extrema importância para formação de engenheiros para o mercado de trabalho, por consolidar o conhecimento adquirido durante o curso. Como consequência, Bernstein (1998, apud COELHO & COELHO, 2004) afirma que a educação em engenharia prática deve se utilizar de equipamentos técnicos e computa-



dores. Somente experimentos por simulação não são suficientes para formação de profissionais capacitados e aptos a atenderem as necessidades industriais. Sendo assim, a relação teoria e prática exige uma renovação constante das ferramentas de ensino no laboratório (DEMO,1998). Observando tal cenário, este trabalho tem como objetivo propor um método educacional de identificação de sistemas utilizando conceitos teóricos utilizado em estratégias de Controle Moderno aplicado na prática.

O trabalho está organizado da seguinte forma: A Seção 2 trata os aspectos sobre representação de sistemas em espaços de estados. Na Seção 3 é feita uma introdução sobre identificação e modelagem de sistemas, e na Seção 4 é apresentada a identificação do módulo didático servo-mecanismo. Finalmente, na Seção 5, as conclusões do artigo são apresentadas.

## 2. REPRESENTAÇÃO DE UM SISTEMA EM ESPAÇO DE ESTADOS

A ideia de espaço de estados vem do método de decomposição de equações diferenciais em variáveis de estados. Neste método, as equações diferenciais que descrevem um sistema dinâmico são organizadas como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem em um vetor de estados do sistema (FRANKLIN *et al.*, 2009). Sistemas também podem ser representados por meio de funções de transferência, que descreve a relação dinâmica de causa e efeito entre uma entrada e uma saída do sistema, mas não fornece informações detalhadas sobre o que ocorre no interior do sistema. A descrição em espaços de estados de um sistema linear permite uma descrição interna de um sistema, sendo as variáveis de estado o menor conjunto de variáveis necessárias para descrever completamente o sistema. Esse tipo de representação descreve o sistema no domínio do tempo e é mais conveniente inclusive para representar sistemas não-lineares e multivariáveis do que a função ou matriz de transferência (AGUIRRE, 2007a). A escolha das variáveis de estado é arbitrária, e depende somente de considerações práticas; no entanto, nem todas as variáveis de estado são necessariamente fisicamente mensuráveis.

Um modelo linear típico em espaço de estados para sistemas lineares e invariantes no tempo, de ordem  $n$ , com  $p$  sinais de entrada e  $q$  sinais de saída tem a seguinte forma conforme equação (1) e (2) (CHEN, 2009):

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2)$$

onde,

$x(t)$  - Vetor de estados ( $n \times 1$ );

$u(t)$  - Vetor de sinais de entrada ( $p \times 1$ );

$y(t)$  - Vetor de sinais de saída ( $q \times 1$ );

$A$  - Matriz de dinâmica ( $n \times n$ );

$B$  - Matriz de entrada ( $n \times p$ );

$C$  - Matriz de saída ( $q \times n$ );

$D$  - Matriz de transmissão direta ( $q \times p$ ), em muitos casos a matriz  $D$  é nula;

### 3. IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

A identificação de sistemas se propõe a obter um modelo matemático que explique, pelo menos em parte e de forma aproximada, a relação de causa e efeito presente nos dados extraídos da dinâmica do sistema (AGUIRRE, 2007a). A identificação pode ser usada em diversas aplicações como para o diagnóstico, a supervisão, a otimização ou o controle de processos industriais. Existem diferentes procedimentos para a identificação de sistemas, como: identificação pelo teste de resposta ao degrau, pela resposta em frequência, identificação *on-line* e identificação *off-line* (COELHO & COELHO, 2004).

Um sistema é um processo cujo comportamento é determinado por variáveis internas que interagem e produzem sinais observáveis, denominadas saídas. As variáveis internas, denominadas estados, representam a evolução temporal do sistema e sofrem estímulos externos através de entradas (acessíveis para manipulação) e perturbações (não acessíveis) (AGUIRRE, 2007b).

Neste trabalho foi utilizado o método de identificação pelo teste de resposta ao degrau, no qual o processo é submetido a uma aplicação do tipo degrau na entrada sendo a saída armazenada. Com a curva de saída do processo é possível então o uso de uma técnica gráfica, numérica ou computacional para modelar matematicamente o sistema.

Não existem métodos gerais que possam sempre ser utilizados para obter um modelo completo. Cada processo ou problema tem suas próprias características.

A construção do modelo usando as leis da física requer o conhecimento e discernimento sobre o processo. O principal problema ao construir um modelo matemático é encontrar os estados do sistema (ÅSTRÖM & WITTENMARK, 1997), que descrevem completamente o comportamento interno do sistema.

### 4. IDENTIFICAÇÃO DO MÓDULO DIDÁTICO SERVO-MECANISMO

No presente artigo foi utilizado um módulo de ensino desenvolvido pela Datapool Eletrônica Ltda modelo 2208, que é constituído por um servo-potenciômetro como transdutor de deslocamento angular. Para a aferição da rotação utiliza-se um tacômetro que fornece um sinal de tensão proporcional à velocidade na faixa de 0 a 5V. O módulo possui também um servomotor de corrente contínua de ímã permanente acoplado a um conjunto mecânico que aciona o conjunto braço/ponteiro do sistema de rotação. A tensão de armadura é alterada por um driver de acionamento linear na faixa de -5 a 5V (DATAPOOL, 2006). A Figura 1 apresenta o módulo 2208.

De acordo com o fabricante, o sistema é linear e de segunda ordem. Assim, as variáveis de estado do sistema, que são a velocidade angular  $w(t)$  e a corrente no motor  $i(t)$ , podem ser descritas como

$$w(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \quad (3)$$

$$i(t) = c_4 e^{\lambda_1 t} + c_5 e^{\lambda_2 t} + c_6, \quad (4)$$

sendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os pólos do sistema, que são puramente reais e distintos, de acordo com experimentos realizados *a priori* pelos autores.



Figura 1 – Módulo Didático Datapool Servo-Mecanismo

A identificação de cada termo das equações de representação dos estados foi feita a partir da resposta do sistema em malha aberta aplicando um degrau de 0,4V, resultando nas curvas de saída apresentadas na Figura 2.

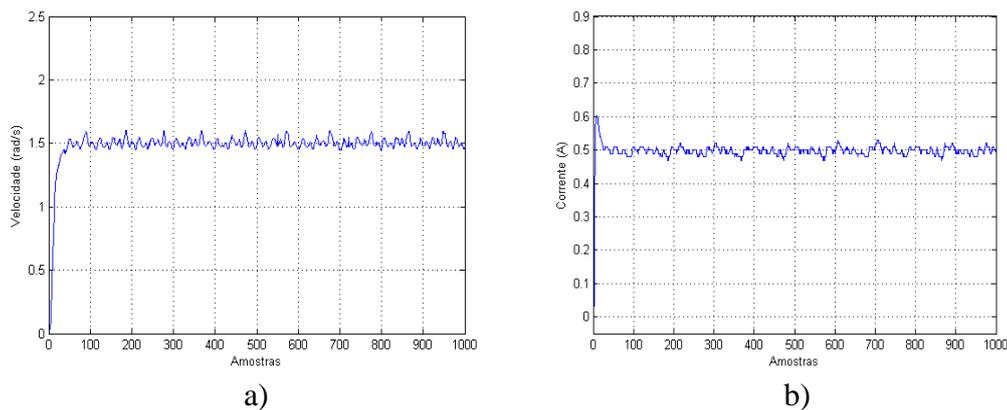


Figura 2 – Curva malha aberta - a) velocidade angular; b) corrente no motor.

Para obter os valores de cada termo das equações (3) e (4) foi realizada a minimização das curvas obtidas no ensaio em malha aberta em relação às equações diferenciais de representação dos estados. A minimização foi realizada utilizando a função *lsqnonlin* do MatLab, que calcula um vetor de parâmetros  $c$ , dado por

$$c = [c_1 \quad \lambda_1 \quad c_2 \quad \lambda_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6], \quad (5)$$

a partir de um vetor de condições iniciais  $c(0)$ , que neste artigo é igual a

$$c(0) = [1 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1], \quad (6)$$

resultando em

$$c = [-3,7814 \quad -0,1414 \quad 2,3141 \quad -0,2659 \quad 1,5023 \quad 0,7643 \quad -1,3979 \quad 0,4968]. \quad (7)$$

Substituindo (7) nas equações (3) e (4) foi possível chegar nas equações de representação de estados que descrevem o comportamento do sistema a malha aberta

$$w(t) = -3,7814e^{-0,1414t} + 2,3141e^{-0,2659t} + 1,5023 \quad (8)$$

$$i(t) = 0,7643e^{-0,1414t} - 1,3979e^{-0,2659t} + 0,4968. \quad (9)$$

Para ilustrar a validação da minimização, é apresentada na Figura 3 uma comparação entre a curva obtida do sistema e a curva identificada.

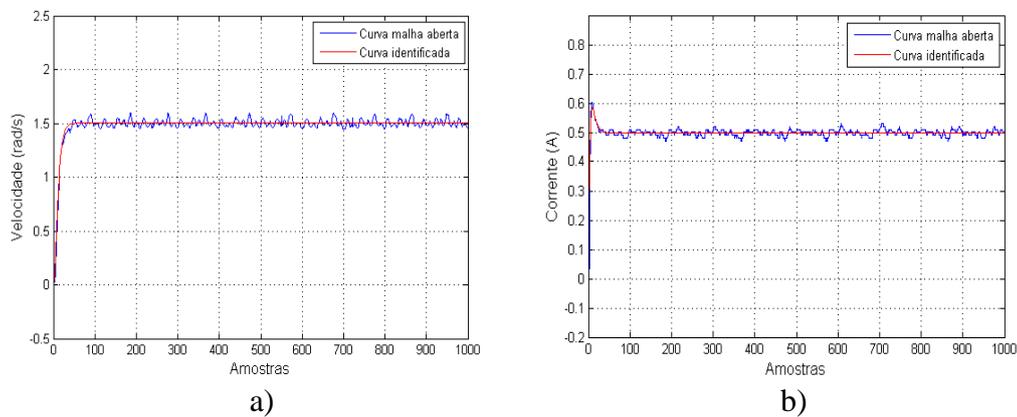


Figura 3 – Validação da minimização: a) velocidade angular; b) corrente no motor.

A derivada das equações (8) e (9) resulta em

$$\frac{dw}{dt} = 0,5346e^{-0,1414t} - 0,6153e^{-0,2659t} \quad (10)$$

$$\frac{di}{dt} = -0,1080e^{-0,1414t} + 0,3717e^{-0,2659t}. \quad (11)$$

Considerando o sinal de controle e o sinal de saída do módulo, o sistema linear pode ser escrito na forma:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (12)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (13)$$

sendo,

$$x(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} u(t) \quad (15)$$

$$[y(t)] = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

As equações de estados são dadas por

$$\frac{dw}{dt} = a_{11}w(t) + a_{12}i(t) + b_{11}u(t) \quad (17)$$

$$\frac{di}{dt} = a_{21}w(t) + a_{22}i(t) + b_{21}u(t). \quad (18)$$

Substituindo as equações (8), (9), (10), (11) em (17) e (18) obtêm-se, através de manipulações matemáticas, os elementos das matrizes A, B e C:

$$A = \begin{bmatrix} -0,0864 & 0,2888 \\ -0,0378 & -0,3285 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5502 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0,93 & 0 \\ 0 & 1,02 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Desta forma, o sistema identificado à malha aberta representado por espaço de estados é dada por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0864 & 0,2888 \\ -0,0378 & -0,3285 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5502 \end{bmatrix} u(t) \quad (20)$$

$$[y(t)] = \begin{bmatrix} 0,93 & 0 \\ 0 & 1,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix} \quad (21)$$

É possível obter os estados  $w(t)$  e  $i(t)$  diretamente de  $y(t)$ , graças à estrutura da matriz  $C$ . Para o estudo de síntese de controladores de realimentação de estados, que é um dos focos dos cursos que utilizam o kit didático, foi aplicada uma transformação de equivalência (CHEN, 2009). Determinando uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  não-singular, tal que  $\bar{x} = Px$ , tem-se uma nova representação do mesmo sistema dada por

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \underbrace{PAP^{-1}}_{\bar{A}} \bar{x}(t) + \underbrace{PB}_{\bar{B}} u(t) \quad (22)$$

$$y(t) = \underbrace{CP^{-1}}_{\bar{C}} \bar{x}(t). \quad (23)$$

Adotando a matriz  $P$  igual à matriz  $C$  temos

$$P = \begin{bmatrix} 0,93 & 0 \\ 0 & 1,02 \end{bmatrix},$$

desta forma, podem-se obter as equações de estados apresentadas abaixo,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,9265 & 11,9658 \\ -1,8860 & -14,9289 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25,5041 \end{bmatrix} u(t) \quad (24)$$

$$[y(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ i(t) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Para validação do sistema identificado foi utilizada a função *ode45* do software Matlab na resolução das equações diferenciais (24) e (25), considerando  $u(t) = 0,4V$ , que resultou nas curvas de comparação apresentadas na Figura 4.

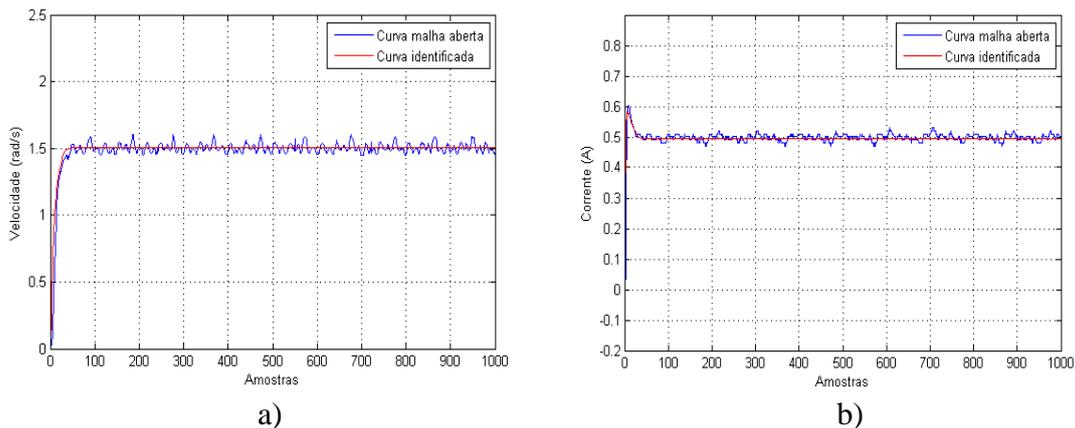


Figura 4 – Curva identificada *versus* a curva em malha aberta obtida: a) velocidade angular; b) corrente no motor.

A partir da Figura 4 é possível verificar que o modelo matemático identificado ficou muito próximo da dinâmica real do módulo didático.

## 5. CONCLUSÕES

O presente trabalho descreve uma estratégia educacional muitas vezes abordada somente na teoria para os alunos dos cursos de Engenharia Elétrica e Engenharia de Controle Automação, que é a identificação de sistemas por espaço de estados.

Os procedimentos utilizados na identificação do sistema demonstraram um resultado muito próximo ao da dinâmica do sistema real, evidenciando a aplicabilidade da estratégia proposta. A utilização do módulo didático propicia aos alunos a oportunidade aplicar conhecimentos teóricos em um sistema real, contribuindo para ampliação do



conhecimento e aperfeiçoamento de conceitos obtidos durante a disciplina de Sistemas de Controle, diminuindo assim a distância entre o aprendizado teórico e o prático.

## **6. AGRADECIMENTOS**

Os autores gostariam de agradecer a Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR pelo apoio na execução deste trabalho.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

AGUIRRE, L. A. Introdução à Identificação de Sistemas. 3. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2007a.

AGUIRRE, L. A. Enciclopédia de Automática: Controle e Automação, volume III. 1. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2007b.

ÅSTRÖM, K.; WITTENMARK, B. Computer-Controlled Systems: theory and design. 3.ed. New Jersey, USA.: Prentice Hall, 1997.

AMARAL, R. P. *et al.*. Ambiente para Simulação e aplicação numa Planta Didática de um Controlador PID Anti Win-Up. **Anais: XXXIX Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia - COBENGE**. Blumenau-SC: 2011

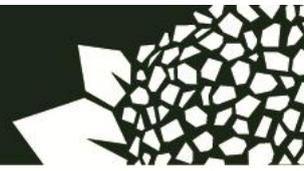
CHEN, C. Linear System Theory and Design, International Edition. 3.ed. New York: OUP USA, 2009.

COELHO, A. A. R.; COELHO, L. d. S. Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares. Florianópolis: Ed. UFSC, 2004.

DATAPPOOL. Servo-mecanismo 2208 Datapool manual de experiências, calibração e manutenção. Itajubá, 2006.

DEMO, P. Educar pela pesquisa, Campinas: Autores associados, 1998.

FRANKLIN, G. *et al.*. A. Feedback control of dynamic systems. 6. ed. Upper Saddle River.: Pearson, 2009.



## **IDENTIFICATION IN SPACES OF STATES OF A TEACHING MODULE SERVO-MECHANISM**

**Abstract:** *This paper presents the procedure for the identification of a servo-mechanism didactic module 2208 Datapool Electronics Ltda., in order to obtain the state space representation of the system. The presented procedure, which assumes that all the states of the system are measurable, allows the state-space representation of the system, highlighting internal features and detailed informations of the process, differently from the classical identification methods. This procedure has been used to provide students of the courses Electrical Engineering and Control Engineering and Automation of the Federal University of Technology Paraná, Campus Cornélio Procópio, with an overview of concepts used in modern control strategies in practice. This representation allows a wide applicability in various areas such as: analysis and control at linear and non-linear, time-invariant systems and time-varying systems, SISO (Single-Input, Single-Output) and MIMO (Multiple-Inputs, Multiple-Outputs).*

**Key-words:** *System Identification, State-Space, State Variables, Servo-Mechanism.*