



ELEMENTOS FINITOS: ESTUDO DE CASO PARA UMA VIGA EM BALANÇO

Wlamir C. Oliveira – wlamir@unifei.edu.br

Maris Stela C. Silveira – mstela@unifei.edu.br

Universidade Federal de Itajubá, UNIFEI, Instituto de Engenharia Mecânica

Av BPS, 1303, Pinheirinho

37500001 – Itajubá - MG

Aparecido G. Silva – garcia@unifei.edu.br

Mestrando em Engenharia Mecânica - UNIFEI

***Resumo:** O objeto em estudo é a comparação entre os resultados do deslocamento vertical máximo de uma viga em balanço carregada em sua extremidade, obtidos pelo método analítico com os obtidos pelo método numérico dos elementos finitos (MEF). As teorias da resistência dos materiais e do MEF são aplicadas com o objetivo de despertar no aluno o interesse pela área estrutural. A proposta seguindo a orientação de PIAGET (1978) deve ser capaz de envolver de tal forma o aluno a ponto que o processo aprendizagem se torne importante e significativo para a sua formação. A imensa aplicação do método numérico utilizado é uma fonte inspiradora para que o aluno se aprofunde no mundo dos métodos dos elementos finitos.*

***Palavras-chave:** Resistência dos materiais, Elementos finitos, Elemento LST.*

1. INTRODUÇÃO

A sala de aula é um espaço de aprendizagem dinâmica numa intervenção que permite o desenvolvimento psicológico e contribui para a apropriação dos instrumentos de mediação cultural. Neste processo onde a relação “direta” passa a “mediada” pelo elemento mediador investigador e produtor de conhecimento constitui um laboratório ideal para a realização da teoria e prática educativa. Cabe ressaltar que neste processo ensino-aprendizagem a metodologia deve ser capaz de priorizar a construção de estratégias da verificação e comprovação na construção do conhecimento, construção de argumentação dos resultados no processo e compreensão dos limites e alcances lógicos das explicações propostas. O elo “diálogo” exige dos interlocutores um respeito mútuo profundo e uma atitude de busca constante. Para FREIRE (1992) o diálogo é o encontro dos homens mediatizados pelo mundo, para pronunciá-lo não se esgotando, portanto na relação “eu-tu”. Neste contexto, o trabalho em questão tem papel instigador no processo de aprendizagem objetivando a mecânica estrutural.

Várias realizações humanas no ramo de engenharia estão calcadas em suportes estruturais. Um corpo, uma estrutura ou um elemento estrutural pode ser submetido a vários tipos de cargas e podem ser classificados como forças concentradas, de campo ou

de superfície (HIBBELER, 2010). Todo corpo, sob ação de forças, tende a sofrer deformações. Conforme POPOV (1978) o corpo é dito estar em equilíbrio quando a somatória das forças e momentos, tomados em relação a qualquer ponto, é nula. A distribuição das forças, por unidade de área, acarreta em tensões e deslocamentos/deformações que devem ser analisados em projetos estruturais de engenharia. A lei de Hooke rege a proporcionalidade entre tensão e deformação em sua fase elástica de deformação. Estudar o comportamento da estrutura baseado na resistência dos materiais é de grande valia. Conforme MOAVENI (1999), métodos numéricos são comumente utilizados para a realização de cálculos estruturais, aliando muitas vezes a resultados experimentais, validando o modelo matemático. O objeto em estudo é a comparação entre os resultados obtidos pelo método analítico com os obtidos pelo método numérico (MEF), adotando o elemento triangular LST (*Linear Strain Triangle*) como elemento da discretização do domínio de uma viga em balanço.

2. ELEMENTOS FINITOS

Uma diversidade de modelos estruturais, muitas vezes associado a cálculos complexos, requer a utilização de métodos numéricos eficientes (CHAPRA; RAYMOND, 2008). Um código computacional FORTRAN foi desenvolvido para gerar a matriz de rigidez dos elementos da malha. Para alcançar a convergência dos resultados, o processo de refinamento versão-h do MEF foi adotado (ZIENKIEWICZ; MORGAN, 1993).

2.1. O elemento LST

O elemento plano triangular de seis pontos nodais fornece em seu interior deformações lineares, razão pela qual é conhecido por elemento LST (*Linear Strain Triangle*) (BATHE; WILSON, 1976).

É utilizada a formulação isoparamétrica do método dos elementos finitos (ZIENKIEWICZ; MORGAN, 1993). Como o campo de deslocamentos nodais do elemento LST é formado apenas pelas variáveis dos deslocamentos lineares nas direções x e y , então o elemento LST implementado no MEF é de continuidade C_0 sendo que suas funções de interpolação (funções de forma) são quadráticas. A “Figura (1a)” mostra o elemento no sistema global, enquanto a “Figura (1b)” mostra o elemento no sistema local de coordenadas naturais ξ e η .

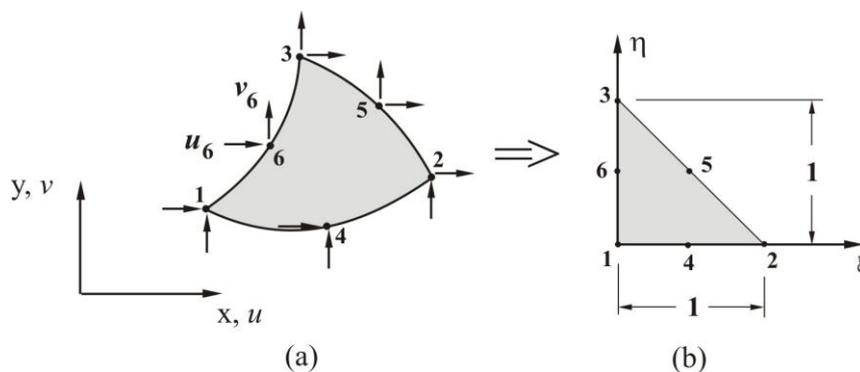


Figura 1 - (a) - Elemento no sistema global; (b) - Elemento no sistema local.

As funções de forma $[N]$ para os nós do elemento em questão são obtidas pela “Equação (1)”. A matriz linha $[P]$ nesta equação é formada pelos termos de um polinômio do segundo grau, dada pela “Equação (2)”. Verifica-se que cada função N_i ($i = 1...6$) se iguala à unidade no nó i e se anula nos demais nós.

$$[N] = [P][C]^{-1} \quad (1)$$

$$[P] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2] \quad (2)$$

Na sequência, obtém-se a matriz Jacobiana da transformação de coordenadas, bem como a área em função do jacobiano (determinante da matriz Jacobiana), no sistema local ξ e η .

A matriz de rigidez do elemento $[K]_{12 \times 12}$ é dada pela “Equação (3)” (ZIENKIEWICZ & MORGAN, 1993) conforme apresentado a seguir

$$[K]_e = t \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] \det[J(\xi, \eta)] d\eta d\xi \quad (3)$$

onde $[B]$ é formada pelas derivadas das funções N_i em relação às coordenadas globais, $[D]$ é a matriz em função do módulo de elasticidade do material e do coeficiente de Poisson, considerando estado plano de tensões e t é a espessura constante do elemento. A matriz de rigidez global $[K]$ do sistema é obtida fazendo o acoplamento dos elementos considerando as condições de contorno do problema. A solução da “Equação (4)” fornece o vetor $\{X\}$ global de deslocamentos nodais do sistema. A partir desse vetor obtém-se os deslocamentos nodais de cada elemento da discretização.

$$\{F\} = [K]\{X\} \quad (4)$$

As tensões no interior do elemento, funções de ξ e η , são obtidas pela “Equação (5)”.

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\}_e \quad (5)$$

onde $\{d\}_e$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

A solução integral dupla para obter a matriz de rigidez $[K]_e$ de cada elemento é obtida adotando-se o procedimento numérico conhecido por quadratura de Gauss (BATHE, K. J.; WILSON, 1976) conforme “Equação (6)”.

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_i G(\xi_i, \eta_i) \quad (6)$$

onde n é o número de pontos de integração, ξ_i e η_i são as coordenadas naturais no sistema local dos pontos de integração e W_i são as ponderações dos respectivos pontos.

3. DESENVOLVIMENTO

3.1. Objeto de estudo

Conforme a teoria da resistência dos materiais, o deslocamento vertical máximo de uma viga em balanço se verifica em sua extremidade A. A viga em estudo é ilustrada pela “Figura 2”.

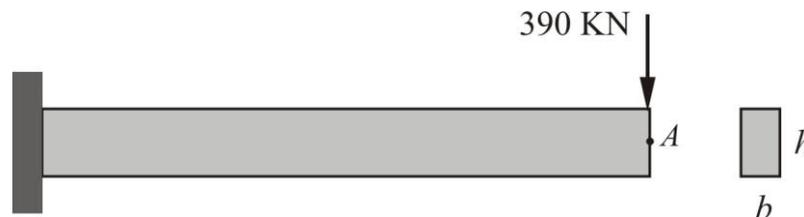


Figura 2 - Viga em balanço com carga aplicada.

Os dados da viga são:

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ [N/m}^2\text{]}, \quad \nu = 0,3, \quad L = 3,0 \text{ [m]}, \quad b = 0,10 \text{ [m]} \text{ e } h = 0,40 \text{ [m]}.$$

3.2. Refinamento da malha de elementos LST

As “Figuras 3, 4 e 5” ilustram as malhas do domínio com elementos LST. O número de elementos de cada malha é denominado por NE e o número total de pontos nodais por NNOS.

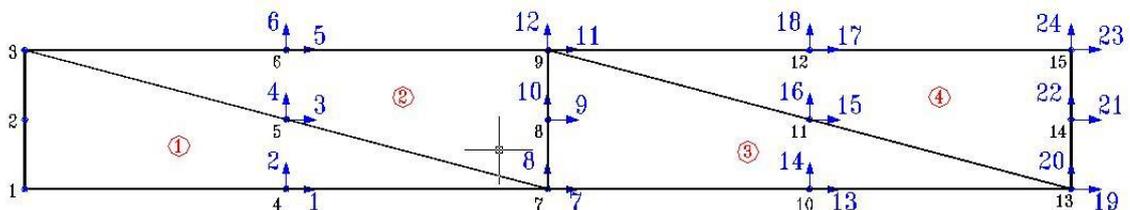


Figura 3 – Modelo com 4 elementos LST

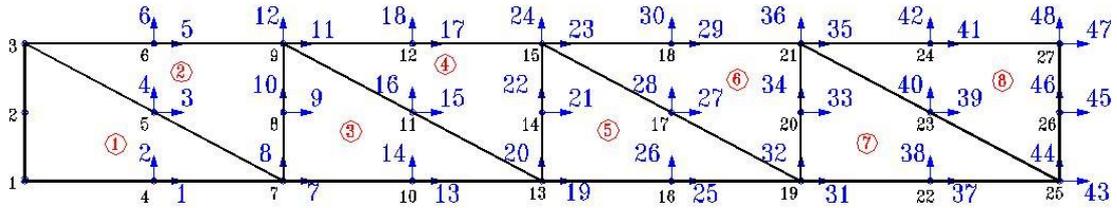


Figura 4 – Modelo com 8 elementos LST

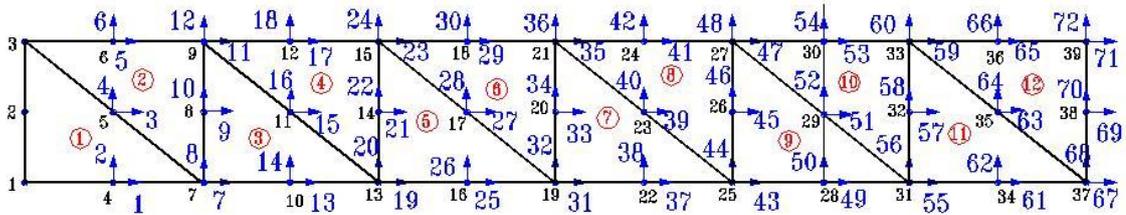


Figura 5 – Modelo com 12 elementos LST

A “Figura 6” ilustra a estrutura deformada considerando o modelo para 12 elementos LST.

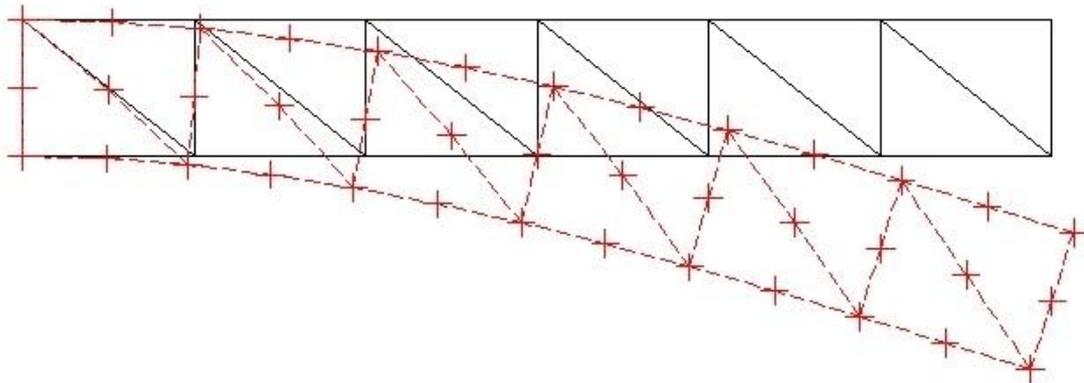


Figura 6 – Modelo com as deformações considerando 12 elementos LST

3.3. Solução analítica e erros percentuais

O deslocamento vertical máximo de uma viga em balanço é obtido pela solução da equação diferencial da linha elástica (HIBBELER, 2010), conforme a “Equação (7)”.

$$y_A = -PL^3/3EI \quad (7)$$

onde P é a carga concentrada na extremidade da viga (390 KN), E é o módulo de elasticidade do material da viga e I é o momento de inércia da área da seção transversal da viga com relação à linha neutra.

Desta forma a solução analítica para o deslocamento máximo da viga em balanço é $y_A = -0,031339$ [m]. A “Tabela 1” apresenta os valores dos deslocamentos máximos obtidos através de refinamentos da malha e também os erros percentuais tomados com relação ao valor da solução analítica. Ressalta-se que NE é o número de elementos de cada malha e NNOS o número total de pontos nodais.

Tabela 1 – Deslocamentos máximos e erros percentuais

Malhas	y_A [cm]	Erro [%]
NE = 4 e NNOS = 15	X(22) = -2,9474	-5,95
NE = 8 e NNOS = 27	X(46) = -3,0977	-1,16
NE = 12 e NNOS = 39	X(70) = -3,1266	-0,23
Solução analítica	-3,1339	

A “Figura 7” mostra a curva dos erros percentuais. Nota-se que, adotando o refinamento versão-h do método dos elementos finitos, a convergência é monotônica (ZIENKIEWICZ; MORGAN, 1993).

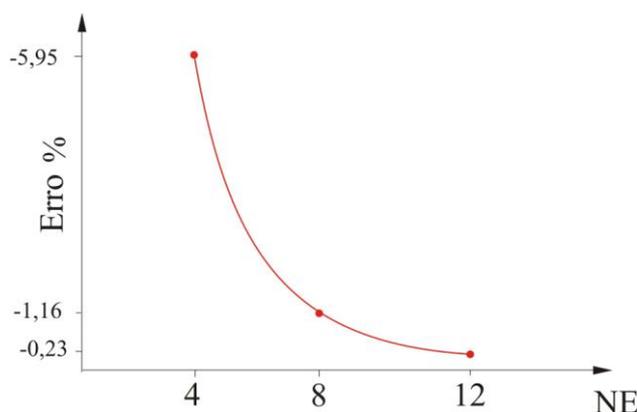


Figura 7 – Erros percentuais

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Identificar e analisar o comportamento das deformações de estruturas é fator significativo para o projeto nas diversas aplicações de engenharia. No exemplo apresentado neste trabalho, considerando 12 elementos LST, o valor do deslocamento máximo da viga engastada, com carga concentrada em sua extremidade livre, difere do valor analítico obtido com erro de -0,23%. Este pequeno erro garante a aplicabilidade e eficiência do elemento LST na utilização de deformações de estruturas sob efeito de flexão (caso analisado) e acarreta em credibilidade ao processo de refinamento versão-h, implementado no método MEF.

A competência profissional aliada à autoridade do professor não estão em demonstrar o controle sobre a classe, mas na interação de caráter intelectual e afetivo numa co-aprendizagem. Esta postura do educador levou os alunos a serem agentes ativos no processo proporcionando reflexão, interesse, interatividade e comprometimento



com o tema e a técnica abordada. É importante salientar que aprender não significa apenas incorporar dados já feitos ou constituído, mas fundamentalmente em redescobrir e reinventar pelas próprias atividades do sujeito desencadeando no processo de aprendizado a partir de todo um corpo envolvido: alunos, docentes e os próprios colegas. Abrangendo a diversificação das formações em engenharia e tendo como pressuposto as contribuições do método nas diversas áreas, o trabalho está aberto a todos os queiram se embrenhar no mundo dos elementos finitos.

REFERÊNCIAS

BATHE, K. J.; WILSON, E. L. Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

CHAPRA, S. C.; RAYMOND, P. C. Métodos numéricos para Engenharia. São Paulo: McGraw-Hill. 2008. 809p.

FREIRE, P. Pedagogia da esperança. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1992.

HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. São Paulo: Pearson, 2010. 641p.

MOAVENI, S. Finite Element Analysis-Theory and Application with ANSYS. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1999.

PIAGET, J. Fazer e compreender. São Paulo: Melhoramentos, Edusp, 1978.

POPOV, E.P. Introdução a mecânica dos sólidos. São Paulo: Ed Blücher, 1978. 534p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. Finite Elements and Approximations. A Wiley-Interscience Publicacion, New York, 1993.

FINITE ELEMENTS: CASE STUDY FOR A CANTILEVER

Abstract: *The subject in question is a comparison between the results of the maximum vertical displacement of a cantilever loaded at its end obtained by the analytical method with those obtained by numerical Finite Element Method (FEM). The theories of strength of materials and the FEM are applied in order to arouse in the student the interest for structural area. The proposal, following the Piaget's orientation (1978), should be able to involve in such a way the students to the point that the learning process becomes important and meaningful for their formation. The wide application of the numerical method that has been used is an inspiring source so that the student can acquire major interest in the world of the Finite Element Method.*

Key-words: *Strength of materials, Finite elements, LST element.*