



DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA DE ENSINO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE USANDO UMA NOVA ABORDAGEM DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Carlos H. L. Veloso – e-mail: henri_5_veloso@hotmail.com

Leticia C. Correia – e-mail: leticiacabralcorreia@bol.com.br

Kléber Z. Nóbrega – e-mail: bzuza@ifma.edu.br

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA)

Endereço: Avenida Getúlio Vargas, nº 4- Monte Castelo

CEP 65030-005 São Luís - MA

***Resumo:** Este artigo trata sobre a criação de um programa visando o auxílio do ensino da Equação de Laplace em cursos de Ensino Superior no IFMA, principalmente em aulas da disciplina de Eletromagnetismo. Tal ferramenta foi construída e realizada tendo como base um método numérico de discretização chamado Método dos Elementos Finitos (MEF) e a utilização de um software compilador como ambiente de programação. Para este fim, foi desenvolvido um programa usando o MEF bidimensional em coordenadas cartesianas com exibição dos resultados em forma de vetor ou de gráficos. O programa resultante deve ser usado como ferramenta didática disponibilizada pelo professor orientador para a comunidade do IFMA.*

***Palavras-chave:** Equação de Laplace, Método dos elementos finitos, Eletromagnetismo.*

1. INTRODUÇÃO

Na disciplina de Eletromagnetismo, o aluno tem, por muitas vezes, seu entendimento comprometido devido a critérios de abstração, inerentes da física envolvida e da análise vetorial necessária. Com o objetivo de suprir esta deficiência, tornaram-se objetos relevantes de estudo algumas ferramentas computacionais associadas a recursos de multimídia (laboratórios virtuais), capazes de facilitar a visualização desses e outros fenômenos ou conceitos no auxílio didático às disciplinas como eletromagnetismo, micro-ondas, óptica e antenas em cursos de Engenharia Elétrica.

A vantagem dos laboratórios virtuais é a possibilidade da simulação e a animação de fenômenos físicos e/ou ferramentas matemáticas, apresentando-se, assim, como mais um recurso didático complementar de apoio às aulas presenciais. Para o ensino de engenharia, estes recursos surgiram em decorrência dos avanços computacionais (*hardware* e *software*), bem como o desenvolvimento de métodos numéricos, por exemplo Diferenças Finitas, Método dos Momentos e Método dos Elementos Finitos (MEF).

Visando uma melhor compreensão dos fenômenos relacionados à Equação de Laplace, neste trabalho é proposta a construção de uma ferramenta computacional para

auxílio no ensino da mesma em disciplinas correlatas ao eletromagnetismo, utilizando um programa que enfatiza o uso e aprendizado de conceitos da Equação de Laplace bidimensional.

Projeto feito por alunos do 5º e 6º período de Engenharia Elétrica Industrial do *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão* (IFMA) financiados pelo Programa de Bolsas de Produtividade Científica e pelo PIBIC, ambos do próprio instituto, sendo o último em conjunto com a *Fundação de Amparo à Pesquisa e Desenvolvimento Científico do Maranhão* (FAPEMA).

2. METODOLOGIA DE DESENVOLVIMENTO

A metodologia para o desenvolvimento do programa foi dividida em duas partes: o Desenvolvimento Teórico e o Desenvolvimento Prático.

2.1. Desenvolvimento teórico

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico de discretização de um modelo matemático contínuo, que particiona o domínio da figura geométrica original em subdomínios mutuamente exclusivos, aos quais são chamados de “Elementos” (Figura 1). Cada Elemento é definido pela ligação dos Nós, que são pontos pertencentes ao domínio (NÓBREGA, 2004). Exemplo mostrado na Figura 2.

O MEF consiste em calcular e somar a contribuição de cada Elemento à uma dada propriedade física associada à figura geométrica (temperatura, potencial elétrico, momento fletor etc.) aplicada em cada nó, ou seja, pode-se aproximar o resultado total de uma propriedade pelo somatório do valor calculado em cada Elemento.

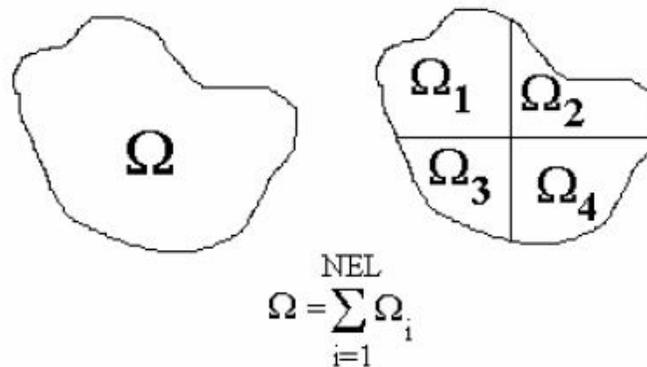


Figura 1- Particionamento do domínio da figura geométrica em Elementos.

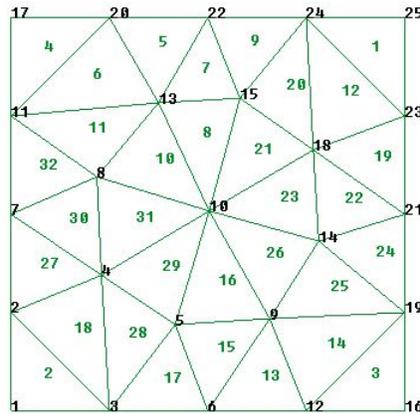


Figura 2- Estrutura geométrica particionada em Elementos (cada um dos triângulos, numerados em verde) e Nós (nos vértices dos triângulos, numerados em preto)

Para o uso do Método dos Elementos Finitos (MEF), deve-se obter uma equação diferencial para a geometria selecionada semelhante à equação

$$L\Phi = f, \quad (1)$$

onde L é um operador diferencial, Φ o campo e f a fonte.

Para o desenvolvimento da equação de Laplace, tomemos como exemplo uma superfície bidimensional, aplicando valores de potenciais elétricos apenas nas bordas.

Na equação de Laplace, temos que

$$\nabla^2 V = 0, \quad (2)$$

onde \mathbf{V} é um vetor contendo os valores do **potencial elétrico** nos nós e ∇^2 é o Laplaciano (operador Nabla ao quadrado) (HAYT & BUCK, 2010). Comparando a equação (1) e a equação (2), pode-se estabelecer uma relação entre L e ∇^2 e também entre Φ e V .

Na forma cartesiana, a equação (2) se traduz

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Como se trata de uma superfície bidimensional, considera-se $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, então

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Em seguida, dando início ao processo de discretização do MEF, pode-se então escrever o potencial, nossa incógnita a priori, como função das coordenadas x e y . Para cada elemento da malha, temos que

$$V(x, y) = \{N(x, y)\}^T \cdot \{v\}, \quad (4)$$

com $\{N\}^T$ sendo um vetor linha em função de x e y e $\{v\}$ a variável do problema.



Aplicando a equação (4) em (3), tem-se que

$$\frac{\partial^2 \{N\}^T}{\partial x^2} \cdot \{v\} + \frac{\partial^2 \{N\}^T}{\partial y^2} \cdot \{v\} = 0. \quad (5)$$

O próximo passo do MEF consiste em definir a formulação integral equivalente, aplicando produto escalar em ambos os lados da equação (5) da função peso W , ou seja

$$\int_{\Omega} W \cdot L\Phi d\Omega = \int_{\Omega} W \cdot f d\Omega, \quad (6)$$

sendo W a função peso e Ω o domínio espacial. Aplicando a equação (6) na equação (5), tem-se que

$$\iint W \cdot \left(\frac{\partial^2 \{N\}^T}{\partial x^2} \cdot \{v\} + \frac{\partial^2 \{N\}^T}{\partial y^2} \cdot \{v\} \right) dx dy = \iint W \cdot 0 dx dy, \text{ ou seja}$$

$$\left[\iint W \frac{\partial^2 \{N\}^T}{\partial x^2} dx dy + \iint W \frac{\partial^2 \{N\}^T}{\partial y^2} dx dy \right] \cdot \{v\} = 0. \quad (7)$$

No MEF, segundo o Método de Garlekin (SHABBIR *et al*, 2012), $W = \Phi$ transposto, então $W = \{N\}$ e a equação (7) tornar-se-á

$$\left(\iint \{N\} \frac{\partial^2 \{N\}^T}{\partial x^2} dx dy + \iint \{N\} \frac{\partial^2 \{N\}^T}{\partial y^2} dx dy \right) \cdot \{v\} = \{0\}, \quad (8)$$

sendo $\{N\}$ um vetor coluna dependente de x e y e $\{0\}$ um vetor de zeros.

Analisando a primeira parcela da equação (8), pode-se fazer a operação de integração por partes. Então

$$\int \{N\} \frac{\partial^2 \{N\}^T}{\partial x^2} dx = \{N\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} - \int \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} dx. \quad (9)$$

Analogamente na 2ª parcela,

$$\int \{N\} \frac{\partial^2 \{N\}^T}{\partial y^2} dy = \{N\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} - \int \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} dy. \quad (10)$$

Como na equação (9) (e na sua parte análoga, na equação (10)), $\{N\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x}$ representa nós de contorno, cujos valores já são definidos, então podem ser considerados nulos. Logo, a equação (8) pode ser reescrita

$$\left(- \iint \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} dx dy - \iint \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} dx dy \right) \cdot \{v\} = \{0\}. \quad (11)$$

Usando a equação (11) na notação discreta (pois softwares trabalham com valores discretos), temos:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left(- [N_{xe} N_{xe}^T] - [N_{ye} N_{ye}^T] \right) \cdot \{v\} = \sum \{0\}, \quad (12)$$

sendo ne o número de elementos presentes na malha. Por fim, no algoritmo fora criada a matriz $[A]$, onde $[A] = \sum(-[N_{xe}N_{xe}^T] - [N_{ye}N_{ye}^T])$. Então se chega à equação final:

$$[A] \cdot \{v\} = \{0\} . \quad (13)$$

No programa, a variável $\{v\}$ se divide em duas partes: a parte com os valores já definidos pelas condições de contorno $\{\Psi\}$ e a parte com os valores indefinidos (chamada aqui de $\{\Xi\}$). Ou seja,

$$\{v\} = \{\Psi\} + \{\Xi\} . \quad (14)$$

Aplicando a equação (14) na equação (13), temos que

$$[A] \cdot (\{\Psi\} + \{\Xi\}) = \{0\} . \quad (15)$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação escalar, temos que $[A] \cdot \{\Psi\} + [A] \cdot \{\Xi\} = \{0\}$, e então

$$[A] \cdot \{\Xi\} = -[A] \cdot \{\Psi\} . \quad (16)$$

Chamando $-[A] \cdot \{\Psi\}$ de b , então o cálculo efetuado pelo programa para descobrir os valores desconhecidos do potencial elétrico é

$$\{\Xi\} = [A]^{-1} \cdot b . \quad (17)$$

Após esse passo, retorna-se a equação (14) para, então, guardar os valores de $\{v\}$

2.2. Desenvolvimento prático

O desenvolvimento e a operação do programa se resumem no fluxograma da Figura 3.

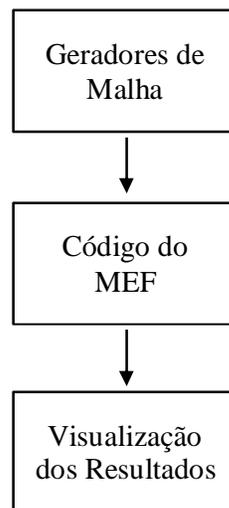


Figura 3: Resumo do Desenvolvimento prático



No primeiro passo, em um programa gerador de malha (como GiD, GMSH, Amtec), a geometria do problema é reproduzida. São aplicadas as condições de contorno e gerada a malha com os nós e elementos. Programa-se o software para exportar três arquivos de dados: o primeiro contendo as coordenadas dos nós da estrutura, o segundo indicando a conectividade entre os nós de cada elemento e por último um arquivo notificando as condições de contorno nos nós apropriados.

Os dados exportados serão analisados pelo programa do MEF no compilador, que consiste em: ler todos os dados citados; montar as chamadas “matrizes elementares”, que farão a conversão dos operadores diferenciais do modelo em uma série de contribuições individuais, ou seja, atribuir a contribuição de cada elemento da malha para o resultado final; somar todas as contribuições das matrizes elementares, para montar a “matriz global” do sistema matricial (chamada de $[A]$ no desenvolvimento teórico); e, finalmente, resolver o problema em questão, guardando os valores da variável $\{v\}$.

Uma vez resolvido o sistema, o último passo consiste em retomar os resultados numéricos e resgatá-los através da visualização das incógnitas, dos gráficos relacionando os valores e a coordenadas dos nós ou manipulação dos resultados para conseguir alguns outros parâmetros inerentes e particulares.

3. DISCUSSÕES E IMPLEMENTAÇÕES

Muitas implementações e melhorias foram feitas ao programa durante seu desenvolvimento. Ao longo do projeto, entraram em discussão as melhores técnicas de programação a serem utilizadas, formas da visualização dos resultados e extensões do atual programa para cálculo de outras grandezas físicas presentes nos estudos de eletromagnetismo.

Ao tratar sobre a visualização dos resultados, houve uma pesquisa sobre a melhor forma de representação, pois ela tinha que ter visualização simples, de fácil entendimento em sala de aula e uso dos alunos, mas também tinha que ser completa para dar todas informações necessárias. Optou-se, então, pelo uso de gráficos cartesianos, tendo como parâmetros as coordenadas dos nós e a própria variável $\{v\}$. Nesses gráficos, o domínio espacial é dado pelos eixos x e y e o resultado da variável do problema é dado no eixo z . Também se faz uso de marcadores coloridos

Sobre as técnicas de programação, este projeto se diferencia da didática encontrada em livros e outros trabalhos que abordam o MEF em programação. De fato, ele faz o processo de construção de $[A]$ sem a utilização de *loops*, mas utilizando técnicas de vetorização, o que melhora, e muito, a velocidade e o desempenho do processamento do algoritmo. A técnica de vetorização consiste em substituir os *loops* (laços) condicionais que seriam feitos pelo algoritmo original por alocação de vetores para serem trabalhados como se fossem uma única matriz (RAHMAN & VALDMAN, 2011). A diferenciação entre as duas técnicas está presente na Figura 12 (no anexo desse artigo) em forma de fluxograma e a comparação entre os desempenhos de ambas está presente na Tabela 1.

Sobre as extensões que poderiam ser feitas ao programa, sabe-se que no eletromagnetismo, ao termos o potencial elétrico, há a possibilidade de calcular diversos outros parâmetros. Nas figuras 9 e 10 (mais adiante), estão o exemplo de uma dessas extensões, criadas para calcular o campo elétrico criado pela diferença de potencial sobre a figura, pois

$$E = -\nabla V, \quad (18)$$

onde E é o campo elétrico.

4. RESULTADOS

4.1. Exemplo

Para explicar o funcionamento do programa nas suas respectivas etapas e mostrar os gráficos resultantes, usa-se como exemplo a geometria apresentada na Figura 4, tendo a sua superfície o espaço em branco contido entre os dois círculos. As condições de contorno foram definidas como 0V no círculo verde e 10V no círculo amarelo.

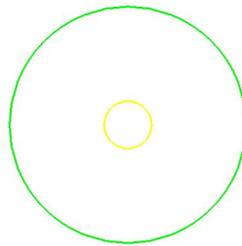


Figura 4: Geometria utilizada como exemplo.

Na figura 5 encontra-se a mesma superfície geométrica, só que agora particionada em nós e elementos em um programa gerador de malhas.

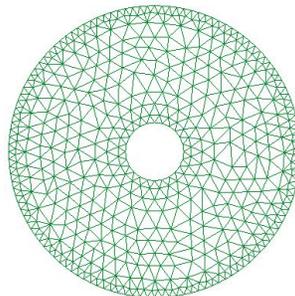


Figura 5: Geometria particionada em nós e elementos criada no programa gerador de malhas.

Após esta etapa, exportam-se os dados para o programa no compilador e lá ocorre a definição da variável $\{v\}$. Gráficos são criados à partir de ferramentas dos próprios compiladores, como mostrados nas Figuras 6 e 7.

Para obter maior precisão de dados, basta aumentar o número de nós (consequentemente, o número de elementos aumentará também) no programa gerador de malhas. A Figura 8 ilustra o uso de maior número de nós.

Nas figuras 9 e 10 estão os resultados da extensão do programa original, criadas para plotar a ação do campo elétrico na geometria utilizada.

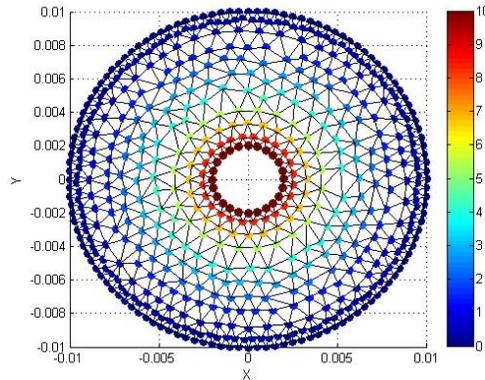


Figura 6: Gráfico em duas dimensões do potencial da geometria do exemplo. As cores indicam o valor do potencial elétrico (V) naquele ponto.

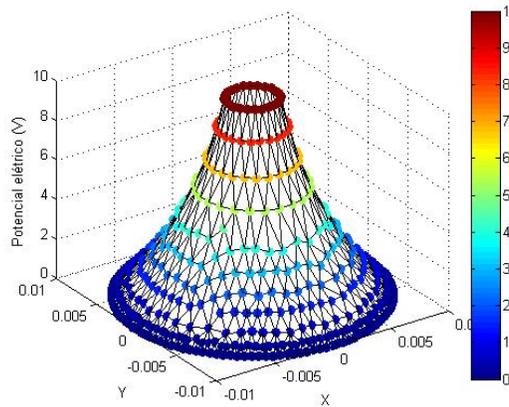


Figura 7: Gráfico em três dimensões do potencial do exemplo. As cores e o eixo vertical indicam o valor do potencial elétrico (V) naquele ponto.

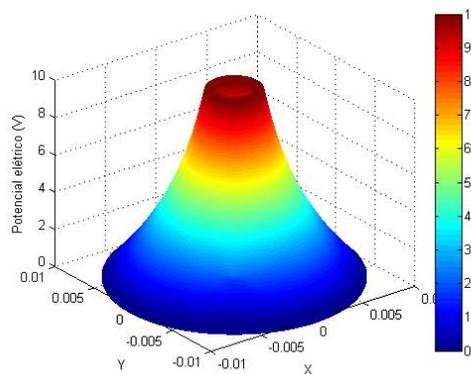


Figura 8: Gráfico em três dimensões da geometria do exemplo com maior precisão de dados. As cores e o eixo vertical indicam o valor do potencial elétrico (V) naquele ponto.

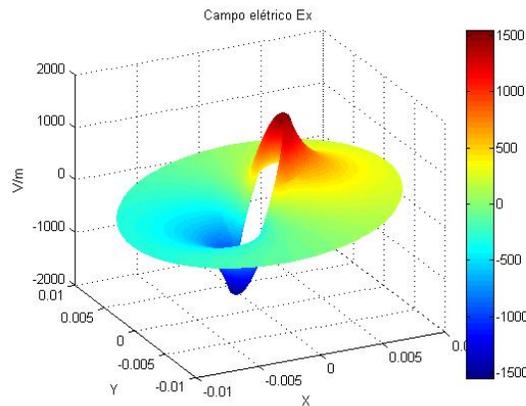


Figura 9: Gráfico do campo elétrico na direção x , feita numa extensão do programa original. As cores e o eixo vertical indicam o valor do campo elétrico (E) naquele ponto.

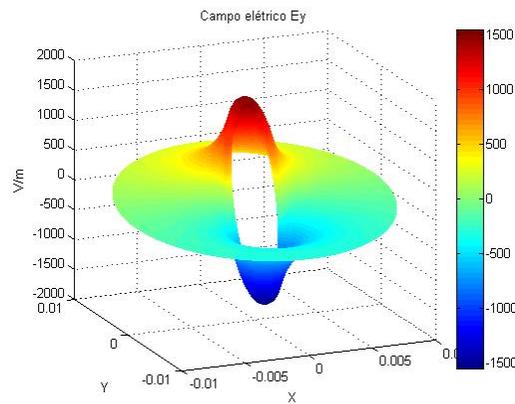


Figura 10: Gráfico do campo elétrico na direção y , feita numa extensão do programa original. As cores e o eixo vertical indicam o valor do campo elétrico (E) naquele ponto.

4.2. Tempo de execução do programa e comparação entre técnicas de programação.

A Tabela 1 contém o tempo de execução dos programas usando as duas técnicas de programação (com *loops* e sem *loops*). Na primeira coluna temos os números de nós criados pela malha. Na segunda e terceira colunas estão presentes respectivamente os valores de tempo de execução dos programas usando as técnicas sem *loop* e com *loop*. Na quarta coluna, está presente a razão entre o tempo com *loop* e o tempo sem *loop*.

Analisando os resultados dessa quarta coluna em conjunto com o gráfico presente na Figura 11, percebe-se que o tempo de execução do programa sem *loop* é, em média, 2,6 vezes mais rápido que o programa com *loop*, o que representa um bom ganho computacional para uma malha razoável (quase dois milhões de pontos) para vários tipos de problemas de geometria bidimensional.

Tabela 1: Contagem dos tempos de execução do programa e a comparação entre a programação com *loop* e sem *loop* (Elementos lineares).

| Nº de nós | Tempo sem loop [s] | Tempo com loop [s] | $t_{loop}/t_{semloop}$ |
|-----------|--------------------|--------------------|------------------------|
| 221 | 0,020 | 0,033 | 1,663 |



| | | | |
|-----------|--------|---------|-------|
| 455 | 0,031 | 0,059 | 1,936 |
| 495 | 0,035 | 0,090 | 2,525 |
| 704 | 0,045 | 0,250 | 5,566 |
| 1.193 | 0,084 | 0,122 | 1,460 |
| 2.398 | 0,087 | 0,200 | 2,307 |
| 3.215 | 0,102 | 0,272 | 2,654 |
| 3.994 | 0,151 | 0,324 | 2,141 |
| 9.586 | 0,265 | 0,730 | 2,753 |
| 9.677 | 0,263 | 0,738 | 2,806 |
| 16.655 | 0,480 | 1,263 | 2,633 |
| 22.005 | 0,566 | 1,665 | 2,943 |
| 49.292 | 1,360 | 3,817 | 2,807 |
| 99.508 | 2,917 | 7,695 | 2,638 |
| 201.601 | 5,985 | 15,885 | 2,654 |
| 419.093 | 13,750 | 33,337 | 2,425 |
| 876.682 | 28,531 | 71,364 | 2,501 |
| 971.448 | 32,885 | 83,829 | 2,549 |
| 1.081.843 | 36,860 | 99,554 | 2,701 |
| 1.210.588 | 41,175 | 107,161 | 2,603 |
| 1.554.142 | 55,865 | 143,670 | 2,572 |
| 1.788.404 | 65,283 | 163,417 | 2,503 |



Figura 11: Gráfico dos tempos de execução do programa. As barras azuis representam o programa com *loop* e as vermelhas representam o programa sem *loop*

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, fora expressada a intenção de criar uma ferramenta computacional a fim de melhorar o aprendizado da Equação de Laplace, no intuito de suprir a deficiência que muitos alunos possuem em absorver os seus conceitos. Para atingir esse o objetivo, se fez uso de um programa desenvolvido usando a técnica numérica chamada Método dos Elementos Finitos. Após sua execução, o programa exibe os resultados na forma de gráficos, ajudando o aluno na visualização do problema em questão. Além disso, também foi mostrada uma nova abordagem de programação do MEF, aqui vetorizada, que torna



o programa muito mais ágil e de mais fácil compreensão para os alunos, otimizando o uso de memória RAM do computador.

Após discussões e melhorias, revisada a teoria e dada a análise dos resultados, finaliza-se este artigo com a conclusão de que o objetivo de criar o programa foi alcançado e que logo será utilizado em aulas sobre a Equação de Laplace no Instituto Federal do Maranhão.

Agradecimentos

À *Fundação de Amparo à Pesquisa e Desenvolvimento Científico do Maranhão* (FAPEMA) e *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão* (IFMA) pelo financiamento da pesquisa através do programa PIBIC e Programa de Bolsas de Produtividade Científica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HAYT, Willian H. BUCK, John A. Eletromagnetismo; tradução Amilton Soares Júnior; revisão técnica Antonio pertence Júnior -7ª ed. – Porto Alegre: AMGH, 2010.

NÓBREGA, Kléber Zuza. Formulação em Elementos Finitos para estruturas ressonantes fotônicas – Campinas: UNICAMP, 2004. Tese (Doutorado).

RAHMAN, T. and VALDMAN, J. Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: Nodal elements, Appl. Math. Comput. (2011).

SHABBIR, M. RAFIQ, M. AHMED, M.O. PERVAIZ, A. SIDDIQUE, R. Finite Element Solution for Two Dimensional Laplace Equation with Dirichlet Boundary Conditions. Pak. J. Engg. & Appl. Sci. Vol. 10, Jan., 2012 (p. 97-102)

DEVELOPMENT OF A TOOL FOR ASSISTENCE OF TEACHING THE LAPLACE EQUATION USING FINITE ELEMENTS METHOD

Abstract: *This document presents the development of a tool software for assistance of teaching the Laplace Equation in Electromagnetism classes at Instituto Federal do Maranhão. The software was created based on a numerical discretizing technique called Finite Elements Method and a compiler software as a programming environment. To reach this goal, the developed program was made using the two-dimensional Finite Elements Method applied to Cartesian system. The software must be used as didactic tool and given to the IFMA community.*

Keywords: *Laplace Equation, Finite Elements Method, Electromagnetism.*



ANEXO

Comparação das duas técnicas de programação utilizadas

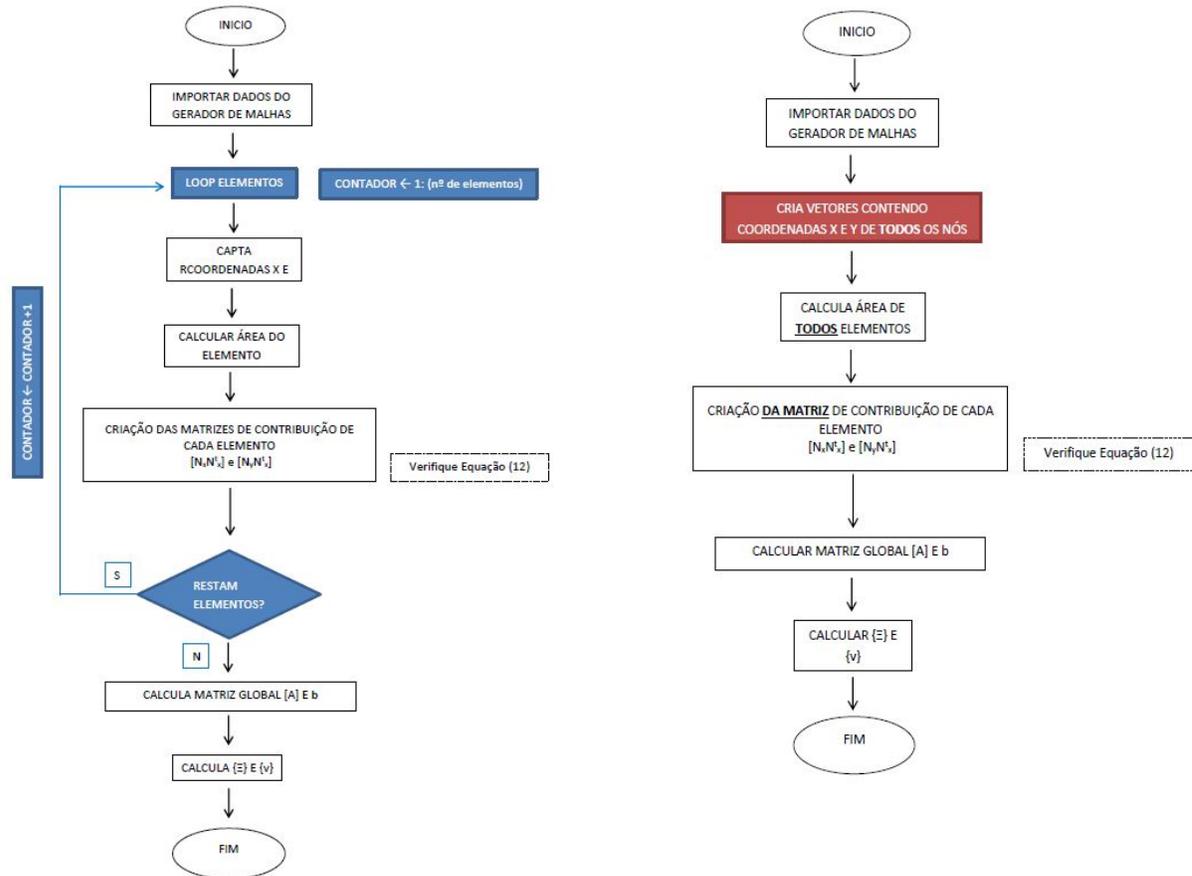


Figura 12: Fluxogramas da sequência de ações dos algoritmos do programa. O primeiro fluxograma, com detalhes azuis, se refere a técnica tradicional com *loops*. O Segundo, com detalhes em vermelho, se refere à técnica vetorizada.