



MODELO MATEMÁTICO DA MESQUITA DOMO DA ROCHA: UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NA ENGENHARIA CIVIL

Sara C. da Silva – sarasilva@utfpr.edu.br

Daniel S. Santos – danielsiqueirasantos@outlook.com

UTFPR, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus de Campo Mourão,
Departamento de Matemática.

Via Rosalina Maria dos Santos, 1233

87301899 - Campo Mourão - Paraná

Resumo: *Este trabalho consistiu em modelar uma grande obra da construção civil através dos conhecimentos adquiridos na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear durante o 1º(primeiro) período do curso de engenharia civil da instituição UTFPR (Universidade Tecnológica Federal do Paraná), campus Campo Mourão, utilizando o auxílio do software matemático Maple. O objetivo do trabalho foi mostrar para os alunos iniciantes do curso de engenharia civil aplicações (na construção civil) dos conteúdos aprendidos na disciplina até então, de forma a estimular o aprendizado já no início do curso, uma vez que as disciplinas que trabalham com aplicações diretas na construção civil geralmente só são vistas em meados do curso. A obra escolhida para modelagem foi o santuário islâmico Domo da Rocha, escolha motivada pelas superfícies quádricas presentes nessa (tópico de estudo da disciplina de Geometria Analítica onde grande parte dos estudantes apresenta dificuldade no entendimento devido à interpretação e representação em três dimensões). Assim como superfícies quádricas, o estudo de vetores, retas e planos também se fez presente, conteúdos indispensáveis da Geometria Analítica. Além de solidificar o aprendizado, o trabalho instigou os estudantes a aprofundar seus conhecimentos em outras disciplinas que de alguma forma pudessem contribuir para uma melhor representação da obra, como por exemplo, a disciplina de cálculo, que trabalha com os mais diversos tipos de curvas.*

Palavras-chave: *Geometria, Maple, Engenharia, Domo da Rocha, Modelagem.*

1. O DOMO DA ROCHA

1.1 História

A Cúpula da Rocha ou Domo da Rocha construída no século VII, durante o governo do califa Abd al-Malik. O califa reuniu artesãos de todo o seu domínio e pediu-lhes que providenciassem uma descrição e um modelo para o domo planejado antes de iniciarem as obras e apontou Raja' ibn Hayweh e Yazid ibn Salam para supervisionarem a construção.

Segundo a tradição o pedaço de rocha preta que o domo cobre foi uma vez a montanha onde Abraão tentou sacrificar Ismael (não Isaque, como judeus e cristãos acreditam).

O Domo da Rocha é um dos sítios mais sagrados do Islã e uma das grandes obras da arquitetura islâmica, foi declarada em 1981, como Patrimônio da Humanidade pela UNESCO e é hoje parte integrante do centro histórico de Jerusalém.



Figura 1- Domo da Rocha

Fonte: <<http://filhadaalvorada.blogspot.com.br/2010/12/masjid-al-sakhras-domo-da-rocha.html>> Acesso em 10 de jun. 2013

1.2 Medidas

Através de informações disponíveis em páginas eletrônicas e com o auxílio de fotos, chegou-se na seguinte aproximação das medidas da obra:

Paredes: 18 metros de comprimento, 11 metros de altura;

Cúpula: 10 metros de raio na base, 13,84 metros de altura;

Cilindro sob a cúpula: 10 metros de raio, 3,77 metros de altura;

Pilares exteriores: 0,47 metros de diâmetro, 4,5 metros de altura;

As figuras Figura 2, Figura3, mostram as principais superfícies da obra escolhidas para serem representadas.

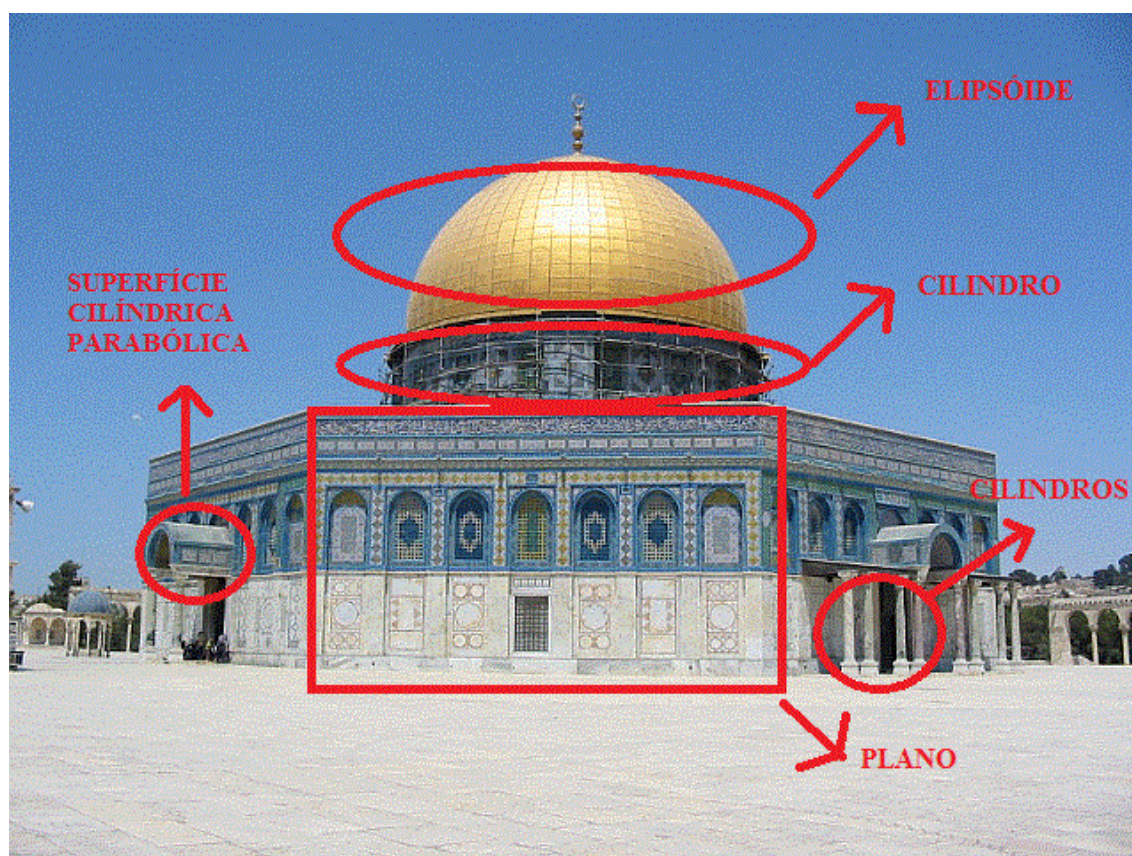


Figura 2- Principais superfícies presentes na obra

Fonte: < <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dome-of-the-rock.gif> > Acesso em 10 de jun. 2013



Figura 3 – Polígonos (trapézios) do telhado

Fonte: < <http://iadrn.blogspot.com.br/2013/02/as-evidencias-do-altar-judaico-estao.html> > Acesso em 10 de jun. 2013

Adotou-se como referencial para origem dos eixos coordenados o centro do octógono ao nível do chão.

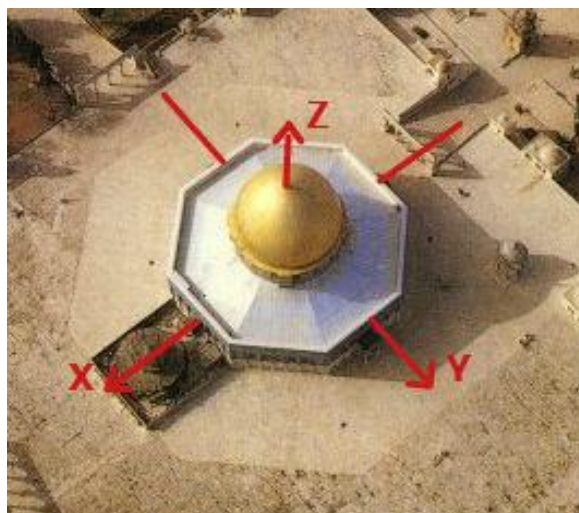


Figura 4- Posição dos eixos coordenados

Fonte: <<http://iadrn.blogspot.com.br/2013/02/as-evidencias-do-altar-judaico-estao.html>> Acesso em 10 de jun. 2013

2. MODELAGEM MATEMÁTICA VIA MAPLE

2.1. O Software *Maple*

O *Maple* é um software matemático desenvolvido pela Universidade de Waterloo no Canadá e pelo Instituto Federal de Tecnologia de Zurique (ETH) na Suíça. Em (SILVA, 2012) o *Maple* é descrito como um software de computação algébrica e simbólica que foi projetado para apresentar resultados na forma mais exata possível sob a ótica matemática. Já (CRUZ, 2008) o define como um sistema matemático simbólico interativo, possuindo recursos extraordinários para resolver questões como cálculo algébrico, interpretação de conceitos, visualização gráfica, modelagem de problemas, etc.

Mariani (2005) descreve o *Maple* como um software versátil, onde a exploração de cálculos numéricos, simbólicos, gráficos e programação podem ser realizadas. Devido a esta versatilidade, o Maple tem sido utilizado em diferentes áreas tanto com intuítos técnicos quanto educacionais.

Na Engenharia Civil são utilizados vários softwares para representação tridimensional, por exemplo, o *AutoCad*. No entanto, para o desenvolvimento deste trabalho, foi escolhido o software *Maple* devido a sua capacitação algébrica nas manipulações geométricas tridimensionais, ou seja, para que o aluno obtenha via *Maple* uma representação geométrica ele deve primeiro expressá-la algebricamente, o que é muito enriquecedor para o seu aprendizado em Geometria Analítica.

2.2 Pacotes e Comandos no Maple

Para representação gráfica no Maple utilizamos três pacotes gráficos do software: *plots*, *plottools* e *geom3d*. Estes pacotes devem ser inseridos na página de trabalho no início do texto, utilizando os seguintes comandos: *with(plots)*, *with(plottools)* e *with(geom3d)*.

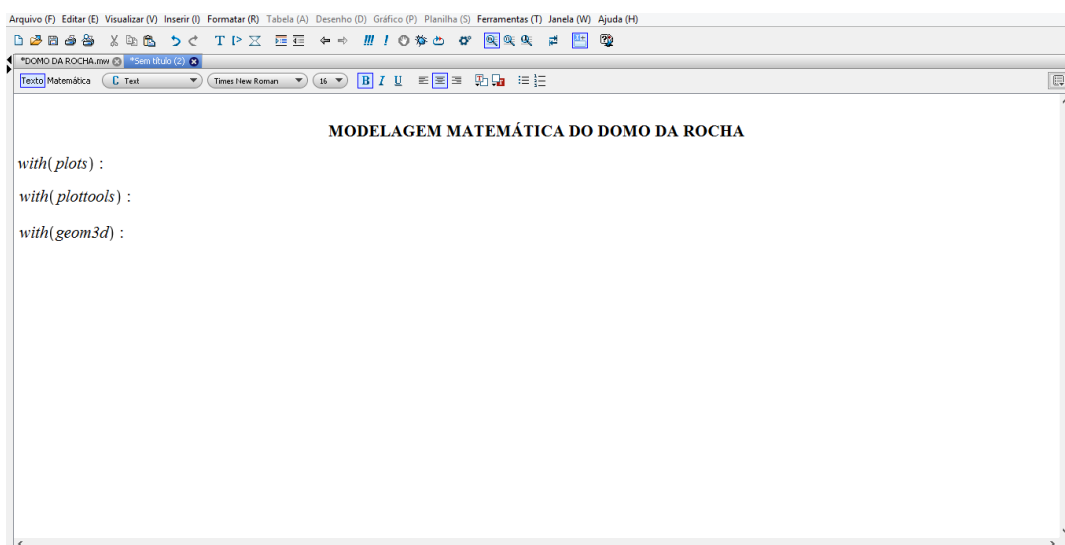


Figura 5: Pacotes gráficos carregados numa folha de trabalho do software *Maple*.

Depois de carregados estes pacotes, basta utilizarmos os comandos básicos para armazenamento e inserção dos gráficos que modelam a superfície de estudo. Por exemplo, para armazenamento da equação de uma parte da superfície, que será modelada matematicamente por uma equação implícita, usamos:

$$\text{parte1} := \text{implicitplot3d}(G(x,y,z)=0, x=a..b, y=c..d, z=e..f, \text{color} = \text{.....}); \quad (1)$$

onde, $:=$ possui a função de armazenar esta superfície para posteriormente plotá-la graficamente, as delimitações da superfície são obtidas nas limitações de x, y, z inseridas no texto entre dois pontos e; em $\text{color} =$ devemos explicitar a cor escolhida para a superfície, por exemplo: $\text{color} = \text{"SkyBlue"}$. Em (SILVA, 2012), encontramos uma descrição detalhada das principais opções gráficas.

Neste trabalho também utilizamos o comando $\text{polygonplot3d}(\text{Matrix}([a_{11}, a_{12}, a_{13}], \dots, [a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}]), \text{color} = \text{cor escolhida})$, para obtermos no espaço tridimensional a representação gráfica de um polígono cujos vértices são os pontos $P_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}), \dots, P_n(a_{n1}, a_{n2}, a_{n3})$ e para plotagem conjunta de todas as superfícies armazenadas foi utilizado o comando $\text{display}(\text{superficie1}, \text{superficie2}, \dots, \text{superficie}k)$, onde os nomes entre parênteses representam as figuras já declaradas anteriormente e armazenadas pelo comando $:=$.

Em (CRUZ, 2008) e (MARIANI, 2005) encontramos mais instruções para utilização do *Maple*.

2.3. Definindo as superfícies

Tendo em mãos as medidas aproximadas, se estabeleceu as equações que representariam cada parte da obra.

Para representar as oito paredes da mesquita, recorreu-se a equações de planos, como por exemplo, a Equação (2) mostrada a seguir.

$$1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 9 + 9\sqrt{2} \quad (2)$$

Optou-se por representar a cúpula através da equação de um elipsóide, que pode ser analisada na Equação (3).

$$\frac{x^2}{10 \cdot 10^2} + \frac{y^2}{10 \cdot 10^2} + \frac{(z - 13.2)^2}{13.84^2} = 1 \quad (3)$$

Sob a cúpula há um cilindro, representado pela Equação (4).

$$x^2 + y^2 = 102.01 \quad (4)$$

Em quatro das oito paredes encontram-se as entradas da mesquita, localizadas dentro de “varandas”, cada qual com oito pilares. A Equação (5) é um exemplo de equação desses pilares.

$$(x - 23.993)^2 + (y + 1.735)^2 = 0.235^2 \quad (5)$$

Na parte central da cobertura das “varandas” citadas anteriormente, há uma superfície cilíndrica parabólica, cujo exemplo de equação é dado na Equação (6).

$$y^2 = -0.9375 \cdot (z - 6.9) \quad (6)$$

É fundamental observar que em todos os casos citados acima, bem como em todas as outras equações usadas neste trabalho fez-se necessária à delimitação de cada plano e superfície em relação aos eixos coordenados x, y e z.

2.4. Representando no Maple

Para representar a obra através do software Maple, primeiramente carregaram-se alguns pacotes que possibilitaram a leitura e plotagem das equações usadas. Em seguida, foram inseridas as equações de acordo com a linguagem do software.

Para representar as paredes e o plano do solo, optou-se por usar a equação geral do plano, que é da forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7)$$

onde A, B e C são as componentes do vetor normal (ortogonal) ao plano e D é uma constante que irá distinguir planos paralelos (STEINBRUCH & WINTERLE, 1987).

A equação do plano do solo em Maple foi escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} solo := & \text{implicitplot3d}(0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0, x = -30 \dots 30, y = -30 \dots 30, z \\ & = 0 \dots 1, color = "DarkGrey", style = \text{patchnogrid}) \end{aligned} \quad (8)$$

A equação de uma das paredes em Maple é mostrada à seguir. Todas as outras paredes foram representadas de forma semelhante:

$$\begin{aligned} plano2 := & \text{implicitplot3d}(1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 18 + 9 \cdot \sqrt{2}, x = 9 \dots 9 + 9 \\ & \cdot \sqrt{2}, y = 9 \dots 9 + 9 \cdot \sqrt{2}, z = 0 \dots 11, color = "SkyBlue") \end{aligned} \quad (9)$$

O telhado foi representado através de oito trapézios, conectando as paredes ao cilindro sob a cúpula. Para representar os trapézios usou-se um recurso do software que possibilita a representação de polígonos através das coordenadas de seus vértices. A Equação (10) representa um dos trapézios em Maple, os outros foram escritos de forma semelhante:

$$\text{telhado1} := \text{polygonplot3d}(\text{Matrix}([[21.728, -9, 8.8], [21.728, 9, 8.8], [10.09, 3.865, 13.2], [10.09, -3.865, 13.2]], \text{datatype} = \text{float}), \text{color} = \text{"LightBlue"}) \quad (10)$$

Para representar o cilindro sob a cúpula utilizou-se uma superfície cilíndrica circular, onde é necessária a equação da circunferência diretriz e a variação da altura. A equação da circunferência pode ser escrita de maneira geral como:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad (11)$$

onde o par ordenado (h,k) representa o centro da circunferência e r o seu respectivo raio (STEINBRUCH & WINTERLE, 1987). Em Maple este cilindro ficou escrito como mostrado na Equação (12).

$$\text{basecupula} := \text{implicitplot3d}(x^2 + y^2 = 102.01, x = -10.10 \dots 10.10, y = -10.10 \dots 10.10, z = 13.2 \dots 16.97, \text{color} = \text{"SkyBlue"}) \quad (12)$$

A cúpula foi representada usando-se a equação do elipsóide, que de maneira geral pode ser escrita como na Equação (13).

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1 \quad (13)$$

onde a terna ordenada (h,k,p) representa o centro do elipsoide e as componentes a,b e c se relacionam com o tamanho dos eixos do elipsoide (STEINBRUCH & WINTERLE, 1987). Em Maple a cúpula ficou escrita como é mostrado na Equação (14).

$$\text{cupula} := \text{implicitplot3d}\left(\frac{x^2}{10.10^2} + \frac{y^2}{10.10^2} + \frac{(z-13.2)^2}{13.84^2} = 1, x = -10.10 \dots 10.10, y = -10.10 \dots 10.10, z = 16.97 \dots 30.81, \text{color} = \text{"Gold"}\right) \quad (14)$$

A representação das varandas foi dividida em três partes: pilares, parte parabólica da cobertura e parte plana da cobertura. Para representar os pilares utilizaram-se superfícies cilíndricas circulares, onde é necessária a equação da circunferência diretriz e a variação da altura, de forma análoga ao que foi feito na equação do cilindro sob a cúpula. Em Maple a equação dos pilares foi escrita como é mostrado na Equação (15):

$$\begin{aligned} c1 := \text{implicitplot3d}((x - 23.993)^2 + (y + 1.735)^2 = 0.235^2, x \\ = 23.758 \dots 24.228, y = -1.97 \dots -1.5, z = 0 \dots 4.5, \text{color} \\ = \text{"WhiteSmoke"}) \end{aligned} \quad (15)$$

A superfície parabólica da cobertura da varanda foi descrita a partir da equação de uma parábola e a devida variação no eixo livre. A equação de uma parábola no plano xy pode ser escrita na forma:

$$(x-h)^2 = 2p(y-k) \quad (16)$$

ou

$$(y-k)^2 = 2p(x-h) \quad (17)$$

onde o par ordenado (h,k) representa as coordenadas do vértice da parábola e 'p' representa a distância do foco da parábola até a reta diretriz (STEINBRUCH & WINTERLE, 1987). A Equação (18) é um exemplo de como essas superfícies cilíndricas parabólicas foram escritas em Maple.

$$\begin{aligned} p1 := \text{implicitplot3d}(y^2 = -0.9375 \cdot (z - 6.9), x = 21.728 \dots 24.228, y = \\ -1.5 \dots -1.5, z = 4.5 \dots 6.9, \text{color} = \text{"DodgerBlue"}) \end{aligned} \quad (18)$$

As partes planas da cobertura das varandas foram escritas como polígonos, como na Equação (19), por exemplo.

$$\begin{aligned} t2 := \text{polygonplot3d}(\text{Matrix}([[24.228, 1.5, 4.5], [24.228, 6.5, 4.5], \\ [21.728, 6.5, 4.5], [21.728, 1.5, 4.5]]), \text{color} = \text{"DodgerBlue"}) \end{aligned} \quad (19)$$

Vale ressaltar que para representar as portas da mesquita dividiu-se a representação das paredes em questão em três planos.

Na Figura 7 vemos o resultado dessa modelagem.

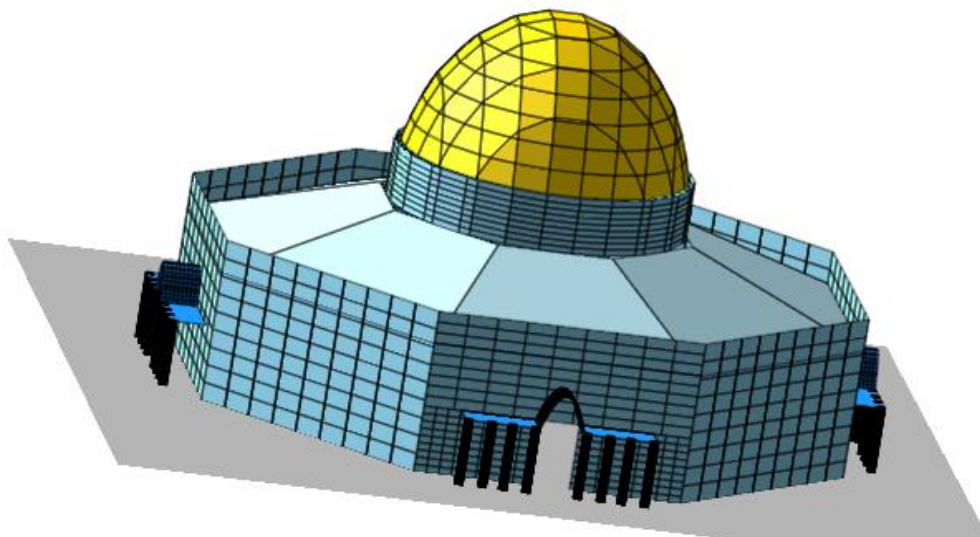


Figura 7: Representação do Domo da Rocha em Maple

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, pode se perceber o envolvimento e motivação dos alunos na utilização dos conceitos teóricos da disciplina para modelar uma grande obra da construção civil.

Os alunos se sentiam desafiados em obter a representação da obra através das equações algébricas. O software possibilitava a conferência imediata do acerto ou erro e isso tornou o estudo mais agradável e recompensador. Cada equação correta gerava uma figura exata, o que compensava o estudo algébrico da figura. Portanto, a utilização de uma superfície real, do cotidiano do aluno, estimulou o interesse e a iniciativa dos alunos do curso de engenharia civil.

Os alunos comentavam que iniciativas como essa deviam ser levadas para outras disciplinas do curso e que, este trabalho se tornou mais interessante do que resolver listas de exercícios, pois puderam compreender bem mais o espaço tridimensional ao fazerem a escolha do ponto referencial (a origem do sistema) e a localização dos vértices dos polígonos a partir do referencial. Já, o estudo das quádras não centradas

na origem foi motivado pelas superfícies expostas na obra analisada como as varandas, os pilares e a cúpula.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) **Cúpula da Rocha.** Disponível em:
<http://www.wikipedia.org/wiki/Cúpula_da_Rocha> Acesso em: 09 jun. 2013.

(2)<http://www.goisrael.com.br/Tourism_Bra/Tourist%20Information/Christian%20Themes/Details/Paginas/Dome%20of%20the%20Rock%20%20%20chr.aspx> Acesso em: 09 jun. 2013

CRUZ, M. M. d. C. Usando o software Maple. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008.

MARIANI, V. C. MAPLE: Fundamentos e Aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. São Paulo: Pearson, 1987

MODEL OF MOSQUE DOME OF THE ROCK : AN ALTERNATIVE TO THE TEACHING OF ANALYTICAL GEOMETRY IN CIVIL ENGINEERING

Abstract: *This work consisted of modeling a large piece of construction through the knowledge acquired in the course of Analytical Geometry and Linear Algebra during the 1st (first) period of the ongoing civil engineering institution UTFPR (Federal Technological University of Paraná), campus Campo Mourao using the aid of mathematical software Maple. The objective was to show the beginner students of the civil engineering course the applications (in construction) of content learned in the course so far, in order to stimulate learning in the beginning of the course, since the disciplines that work with direct applications in construction are usually only seen in mid-course. The monument chosen for modeling was the Dome of the Rock, The Islamic shrine, choice driven by quadric surfaces present in this (topic of study of the discipline of analytical geometry where most students have difficulty in understanding due to the interpretation and representation in three dimensions). Just as quadric surfaces, the study of vectors, lines and planes was also present, the essential content of Analytic Geometry. Besides solidifying learning, the work instigated students to deepen their*



knowledge in other subjects that somehow could contribute to a better representation of the work, such as the Calculus subject which works with many different types of curves.

Key-words: *Geometry, Maple, Engineering, Dome of the Rock, Modeling.*