



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SUA APLICAÇÃO EM CIRCUITOS ELÉTRICOS PARA A MOTIVAÇÃO DE ALUNOS DO ENSINO TÉCNICO À CARREIRA DE ENGENHEIRO ELETRICISTA

João Paulo Bispo – jp_bispo_goncalves@hotmail.com

Thiago de Souza Pinto – thiagosp@utfpr.edu.br

Glaucia Maria Bressan – glauciabressan@utfpr.edu.br

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Av. Alberto Carazzai, 1640

Coordenação do Curso de Matemática

CEP 86300-000 – Cornélio Procopio – PR

Resumo: *Graças ao bom momento econômico que o Brasil vem passando, o país tem apresentado um notável crescimento industrial-tecnológico. Para dar continuidade a esta ascensão econômica do país, precisa-se de profissionais bem qualificados para atuarem nas áreas tecnológicas. A formação desses profissionais, principalmente dos engenheiros, pode ser interrompida devido à falta de informação de alunos do ensino médio sobre a carreira do engenheiro e sobre o curso de graduação em Engenharia. Neste contexto, o objetivo desse trabalho é justamente mostrar as aplicações do Cálculo, por meio das Equações Diferenciais e da Transformada de Laplace, no estudo de circuitos elétricos de pequeno porte a alunos do Ensino Médio, além de motivá-los a seguir a carreira de engenheiro. Esta articulação entre a teoria matemática e as aplicações da Engenharia estimula o aprendizado e contribui de forma efetiva no incentivo de iniciar o curso de engenharia.*

Palavras-chave: *Equações Diferenciais, Transformada de Laplace, Filtro Passa-Baixa, Motivação.*

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, o Confea (Conselho Federal de Engenharia, Arquitetura e Agronomia) afirma que o Brasil tem um déficit de 20 mil engenheiros por ano (Notícias CONFEA, 2012), problema que se agrava devido a um enorme quadro de demanda por profissionais dessa área. Além disso, o cenário do Brasil, país emergente onde projetos de infraestrutura estão sendo realizados frequentemente e empresas e indústrias estão se instalando, apresenta falta de engenheiros com formação sólida no mercado, sendo necessário impulsionar a formação de uma grande quantidade de engenheiros capazes de se adaptar ao dinâmico mercado que a globalização apresenta. Segundo Ricardo Gattas, superintendente da área de Universidades da Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), empresa pública de fomento à ciência, tecnologia e inovação em empresas,

universidades institutos tecnológicos e outras instituições públicas ou privadas, o desenvolvimento das engenharias é um fator estratégico para o progresso do Brasil e a velocidade do desenvolvimento do setor empresarial de uma nação depende da disponibilidade de engenheiros altamente qualificados; sem estes, não há como implementar nenhum projeto de desenvolvimento nacional (Revista Inovação, FINEP, 2013).

Mesmo existindo a necessidade de qualificação dos recém-formados em Engenharia, outro problema grave que afeta o cenário atual é a baixa qualidade da educação nas escolas de ensino médio. Tais escolas não apresentam estruturas curriculares que motivem seus alunos a seguirem a carreira de engenheiro e suas aulas em geral são teóricas e não envolvem aplicações, tampouco dados experimentais e reais. De acordo com o estudo de Rehfeldt *et al* (2012), os conhecimentos mais ausentes nos alunos de ensino médio são a capacidade de reconhecer propriedades dos logaritmos, de resolver situações-problema envolvendo conceitos trigonométricos e de realizar cálculos com potências e raízes. A falta de conhecimento prévio pode levar a um desconhecimento das diversas aplicações das disciplinas estudadas, em especial, da Matemática e da Física, o que pode acarretar no desinteresse, fazendo com que os jovens acabem optando por outras carreiras. Essa realidade, aliada aos dados de que Engenharia é um curso com alto índice de reprovação, faz com que o aluno de ensino médio fuja das áreas da engenharia e das ciências exatas, em geral. Além disso, as faltas de informação sobre a carreira do engenheiro e sobre o curso de graduação em Engenharia podem criar uma opinião errônea sobre a atuação do profissional.

Acreditando que uma forma de contribuir para a motivação de alunos do ensino médio é a utilização de exemplos práticos que permitam a visualização dos fenômenos e também a importância da Engenharia no cenário atual, como apontam os trabalhos de Tofoli *et al* (2011); Beltrão & Iglori (2010), dentre outros, o presente trabalho tem como principal objetivo a utilização da teoria matemática, em especial Equações Diferenciais e Transformada de Laplace, para compreensão de aplicações reais de pequeno porte que envolvam circuitos elétricos integrados, como por exemplo, o Filtro Passa-Baixa. Para isso, propõe-se estudar, juntamente com alunos do ensino médio, o detalhamento analítico da solução de problemas relacionados ao tema Circuitos Elétricos, estabelecendo a relação entre as disciplinas teóricas básicas de Matemática, lecionadas nas séries iniciais do ensino médio/técnico e nos cursos de Engenharia, e as disciplinas específicas, despertando o interesse pela carreira do engenheiro e pela pesquisa científica, além de preencher esta lacuna temporal existente nas grades curriculares, desta forma, ainda cursando o ensino médio, o aluno terá oportunidade de conhecer algumas aplicações da Matemática na Engenharia Elétrica. Vários trabalhos discutem a reprovação dos alunos de Engenharia nas séries iniciais do curso (ARAÚJO *et al*, 2011; HENNING *et al*, 2008). Com base nas análises dos dados de Assunção *et al* 2012, 85% dos alunos ingressantes na graduação possuem dificuldades com relação às disciplinas básicas.

O contato prévio com a Engenharia pretende estimular seu ingresso na graduação e, conhecendo-se aplicações que envolvam conceitos matemáticos e físicos, o aluno terá maior motivação para cumprir as séries iniciais do curso, composta fundamentalmente de disciplinas teóricas de Cálculo e Física, evitando, possivelmente, alguns problemas que envolvem a formação do engenheiro como a ausência de matérias práticas no começo do curso, que acaba desestimulando-o a concluí-lo.

Desta forma, este trabalho pretende estimular o interesse de alunos do ensino médio pela profissão de engenheiro e pela pesquisa, além de contribuir, também, para a

redução da evasão de alunos nas séries iniciais da graduação pela falta de informação sobre as disciplinas e sobre as áreas de atuação.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Atualmente, este trabalho encontra-se em andamento e envolve um aluno do curso técnico em Eletrotécnica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Campus Cornélio Procopio. O curso técnico em Eletrotécnica, onde estão sendo desenvolvidas as atividades, tem duração de 4 anos e, nele, já são introduzidos conceitos de Cálculo. Com o aluno ingressante em 2011, selecionado para desenvolver as atividades desse trabalho, as associações entre a teoria matemática e as aplicações estão sendo realizadas entre conceitos de Equações Diferenciais e Transformadas de Laplace, direcionadas para a introdução de circuitos integrados de pequeno porte, como por exemplo, o Filtro Passa-Baixa.

O Filtro Passa-Baixa é um circuito *quadripolo*, ou seja, de quatro terminais, que permite a passagem de sinais de tensão e corrente com frequências abaixo de certo limite e atenua os sinais de frequências acima desse limite.

2.1. Como relacionar a Transformada de Laplace em Circuitos Elétricos de Pequeno Porte

A Transformada de Laplace é de muita importância no estudo de alguns fenômenos físicos. Por ser uma excelente ferramenta de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem a Transformada de Laplace é aplicada na análise da tensão de circuitos elétricos.

Em geral, o método de Transformada de Laplace consiste em resolver equações diferenciais como se fossem equações algébricas (OGATA, 2011; ZILL&CULLEN, 2011). Desta forma, pode-se chegar a uma função, de variável diferente da primeira, que possui uma determinada e desejável propriedade que a primeira função não possuía. Em seguida, fazendo o caminho inverso, o qual é chamado de transformada inversa, pode-se obter o resultado esperado para a primeira função, em sua variável original.

As Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem descrevem muitos fenômenos físicos e podem ser resolvidas aplicando-se a Transformada de Laplace. A tensão em um circuito RC série, por exemplo, é dada pela Equação (1)

$$E(t) = \frac{1}{C} q + R \frac{dq}{dt} \quad (1)$$

Ao transformar a Equação (1), aplicando Laplace, a equação resultante pode ser resolvida por métodos algébricos mais simples. A transformada inversa retorna, por sua vez, a solução procurada na variável t .

2.2. Filtros Contínuos

Os filtros contínuos são blocos lineares básicos formados por circuitos elétricos utilizados em diversos sistemas eletrônicos, imprescindíveis na generalidade dos circuitos de transmissão e recepção de sinal. São igualmente úteis na rejeição de ruído, ou na implementação de moduladores/desmoduladores.

A análise do comportamento dos filtros contínuos pode ser caracterizada pela sua resposta em frequência. Neste âmbito é geralmente utilizada a sua função de transferência no domínio da transformada de Laplace. A resposta de um filtro no domínio do tempo está intimamente relacionada com a sua resposta em frequência. Aliás, a equação diferencial que define a forma de onda da saída, para um dado sinal de entrada, está implícita na função de transferência do filtro (OPPENHEIM *et al*, 1996).

A forma mais simples e mais comum, de caracterizar o comportamento de um filtro é através do cálculo da sua Função de Transferência no domínio da transformada de Laplace, escrita na Equação (2).

$$H(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} \quad (2)$$

Ou seja, o estudo do bloco pode ser feito diretamente a partir da relação entre o sinal de saída e o sinal de entrada. Este princípio básico da análise de sistemas lineares e invariantes no tempo permite simplificar e generalizar o estudo de qualquer circuito, independentemente da arquitectura interna utilizada para implementar o filtro. A Figura 1 ilustra a interpretação da Transformada de Laplace.

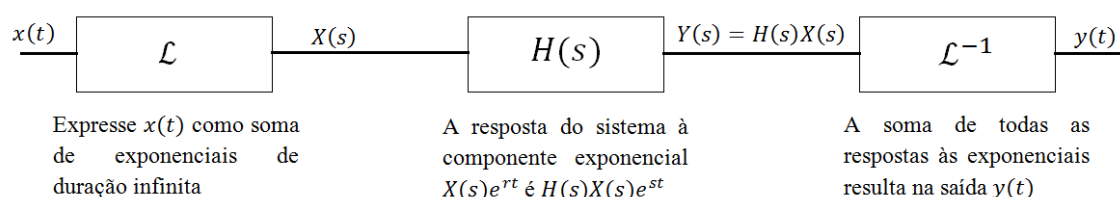


Figura 1. Interpretação da Transformada de Laplace (Lathi, 2007)

Existem duas famílias distintas de filtros: os filtros passivos e os filtros ativos. Os filtros passivos são realizados usando apenas componentes passivos, como resistências, condensadores e bobinas. Os filtros ativos utilizam componentes activos, como AMPOPs, transconductores, ou simples transístores, em conjunto com os componentes passivos, de forma a realizar as funções de filtragem.

Existem quatro classes básicas de Filtros, cuja denominação depende das frequências que rejeitam ou deixam passar: Passa-Baixa, Passa-Alto, Passa-Faixa e Rejeita-Faixa. Os filtros analógicos Passa-Baixa são os mais comuns. Os Filtros Passa-Alto têm a funcionalidade complementar, ou seja, rejeitam as baixas frequências do sinal de entrada, e deixam passar as altas frequências. Os Filtros analógicos Passa-Faixa são bastante comuns em sistemas de comunicações, na realização de faixas de sintonia em receptores de rádio. São úteis para selecionar uma faixa específica de interesse, rejeitando as restantes. Por último, os Filtros Rejeita-Faixa realizam a função complementar do Filtro Passa-Faixa.

2.3. Filtros Passa-Baixa RC

Inicialmente, são introduzidos nos estudos os Filtros Passa-Baixa RC, que são circuitos eletrônicos que permitem a passagem de baixas frequências sem dificuldade e

atenua (reduz) a amplitude das frequências maiores que a frequência de corte (SADIKU, & ALEXANDER, 2013). A quantidade de atenuação para cada frequência varia de filtro para filtro. Estes circuitos filtram sons agudos, ou seja, de frequências altas e deixam passar sons de baixa frequência, os graves.

A Figura 2 ilustra uma descrição do circuito elétrico que representa um Filtro Passa-Baixa, onde V_e é a tensão de entrada do circuito, V_s é a tensão de saída do capacitor, R o resistor, C o capacitor e i a corrente.

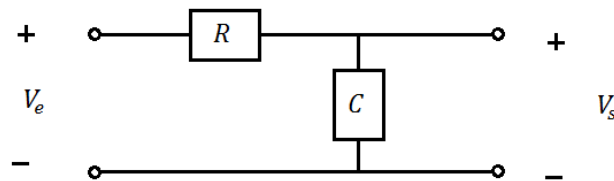


Figura 2. Circuito RC – Filtro Passa-Baixa.

A tensão de saída V_s pode ser escrita em função de V_e conforme a Equação (3)

$$V_s = \frac{X_c}{R+X_c} V_e, \quad (3)$$

em que X_c é a reatância capacitiva dada na Equação (4)

$$X_c = \frac{1}{j\omega C}. \quad (4)$$

Substituindo a Equação (4) na Equação (3), obtemos a Equação (5)

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1+Rj\omega C} = H(\omega). \quad (5)$$

A Equação (5), indicada por $H(\omega)$, é a função transferência de um Filtro Passa-Baixa RC em função da frequência. Como $H(\omega)$ é uma função complexa e o ganho de tensão é o módulo da função de transferência na forma polar, e a fase é o ângulo da função de transferência, podemos escrever respectivamente a expressão para o ganho de tensão e fase para um Filtro Passa-Baixa RC, conforme Equações (6) e (7)

$$GV = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \quad (6)$$

$$\alpha = \arctg(\omega RC) \quad (7)$$

Por meio da função transferência de um Filtro Passa-Baixa RC dada na Equação (5), pode-se descobrir a frequência de corte, ou frequência limite. Observando que a frequência de limite ocorre quando $G = \frac{1}{\sqrt{2}}$, então

$$1 + (\omega_c RC)^2 = 2 \Rightarrow (\omega_c RC)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \quad (8)$$

Assim, a Equação (8) fornece a frequência de corte para um Filtro Passa-Baixa RC. Utilizando as Equações (7) e (8) tem-se que a fase na frequência de corte será igual a $\alpha = -45^\circ$.

Utilizando a expressão do ganho na Equação (6) e da fase na Equação (7), os gráficos de resposta em frequência do Filtro Passa-Baixa RC podem se traçadas, conforme as Figuras (3) e (4).

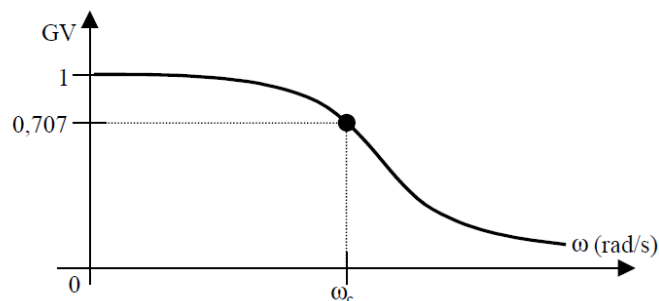


Figura 3. Gráfico de resposta em frequência do Filtro Passa-Baixa RC – Ganho de tensão

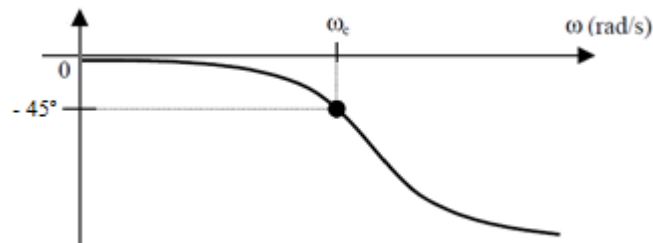


Figura 4. Gráfico de resposta em frequência do Filtro Passa-Baixa RC - Fase

Ainda, com auxílio da escala logarítmica, o gráfico da equação (7) pode ser construído em dB, conforme a Figura (5).

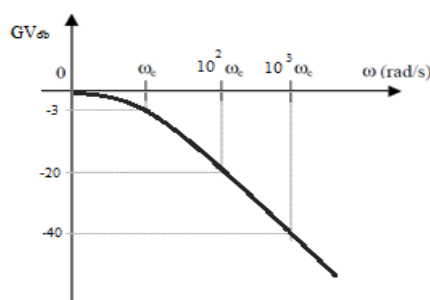


Figura 5. Gráfico de resposta em frequência do Filtro Passa-Baixa RC - Ganho de tensão em dB

Realizando uma análise na Figura (5) pode ser observado que, após a frequência de corte, cada vez que a frequência aumenta de um fator de 10, o ganho diminui em 20 dB, isto é, ocorre uma atenuação de 20 dB por década de aumento da frequência.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O aluno selecionado para o desenvolvimento deste estudo, ainda cursando o ensino médio em Eletrotécnica, está tendo a oportunidade de conhecer algumas aplicações que envolvam conceitos matemáticos e físicos na área de Engenharia Elétrica. Este contato prévio com as aplicações tem agido no sentido de motivá-lo a ingressar na graduação nesta área, em especial, em se tratando da Engenharia Elétrica. Outro ponto que deve ser levado em consideração é que, relacionando a teoria das Equações Diferenciais e das Transformadas de Laplace com Circuitos Elétricos, pode-se preencher a lacuna temporal existente nas grades curriculares entre as disciplinas teóricas e as específicas e também motivar à pesquisa e à conclusão do curso de graduação. Desta forma, com o efeito multiplicador deste trabalho, é possível contribuir para suprir a demanda de profissionais e de pesquisadores, além de contribuir para o combate à evasão hoje existente nos cursos de Engenharia.

Este trabalho está em fase intermediária e pretende-se avançar os estudos para a Teoria de Resposta em Frequência (Função de Transferência, diagrama de Bode, Ressonância Série e Paralela e Filtros Passivos) e compreender aplicações como, por exemplo, Receptores de Rádio e Discagem por Tom.

Agradecimentos

Os autores agradecem o Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) pelas bolsas concedidas ao professor da categoria EBTT e aos alunos de ensino técnico do curso de Eletrotécnica da UTFPR Campus Cornélio Procópio para o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, P. R.; ALMEIDA, D. D.; SOUSA, G. M. C. de; RIBEIRO, T. R. L. T.; BARROS, M. T. A. Reprovação nas disciplinas básicas: Uma reflexão dos aspectos pedagógicos, na perspectiva dos docentes e discentes aprovados. **Anais: XXXIX – Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**. Blumenau, 2011.



ASSUNÇÃO, A. S.; PEREIRA, M. J.; FONSECA, M. C. P. Uma Análise Exploratória Comparativa do Desempenho Acadêmico nas Disciplinas Básicas em um Curso de Engenharia. **Anais: XL – Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**. Belém, PA, 2012.

BELTRÃO, M.E.; IGLIORI, S.B.C. Modelagem Matemática e Aplicações: Abordagens Para o Ensino de Funções. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.1, pp.17-42, 2010.

CONFEA. **A falta de engenheiros**. Disponível em: <http://www.confea.org.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=15360&sid=1206> > Acesso em: 28 maio 2013.

FINEP, **Revista Inovação**, 6ª Edição. Disponível em: http://www.finep.gov.br/pagina.asp?pag=comunicacao_revista_inovacao_pauta_6 > Acesso em: 28 maio 2013.

HENNING, E; BARZ, L. L; LIMA, L. R. MANDLER, M. L; PAHL, T. B. Deficiências no Embasamento matemático como fator de retenção no ciclo básico. **Anais: XXXVI – Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**. São Paulo, 2008.

LATHI, B.P.; VEEN, B.V. **Sinais e Sistema Lineares**. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5ª ed. Rio de Janeiro: Pearson Education, 2011.

OPPENHEIM, A.V.; WILLSKY, A.S.; NAWAB, S.H. **Signals and Systems**. 2ª ed. Prentice Hall, 1996.

REHFELDT, M. J. H.; NICOLINI C. A. H.; QUARTIERI, M.T.; GIONGO, I. M. Investigando os Conhecimentos Prévios dos Alunos de Cálculo do Centro universitário Univates. **Revista de Ensino de Engenharia**, vol. 31, nº 1, pag. 24-30, 2012.

SADIKU, M. N. O., ALEXANDER, C.K. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 5ª. ed. McGraw Hill, 2013.

TELLES, M. **Brasil sofre com a falta de engenheiros**. <http://www.finep.gov.br/imprensa/revista/edicao6/inovacao_em_pauta_6_educacao.pdf> Acesso em: 28 de maio de 2013.

TOFOLI, F.L.; OLÍVIA, F.A.; SILVA, V.A.; VALTER, J.S. Utilização de Exemplos Práticos no contexto da Eletrônica de Potência para o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral em Cursos de Graduação em Engenharia Elétrica. **Anais: XXXIX - Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**. Blumenau, SC, 2011.

ZILL, D. G.; CULLEN, M.R. **Equações Diferenciais**. 3ª ed. São Paulo: Makron Books, 2001.



DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ITS APPLICATION IN ELECTRIC CIRCUITS IN ORDER TO MOTIVATE TECHNICAL EDUCATION STUDENTS TO PURSUE THE ELECTRICAL ENGINEER CAREER

Abstract: *Thanks to the good economic moment Brazil has been passing, this country has been presenting a notable industrial-technological development. To continue this economical rising, qualified professionals are required. The qualification of these professionals, especially engineers, can be interrupted due to the lack of information of high school students about the Engineer career and about the Engineering course. In this context, the goal of this work is to show Calculus applications, through the Differential Equation and the Laplace Transform, in the study of low-port electric circuits to Technical Education students, besides motivate them to pursue the Engineering career. This linkage between mathematical theory and Engineering applications stimulates learning and contributes effectively to start the Engineering course, as well.*

Key-words: *Differential Equations, Laplace Transform, Technical Education, Motivation, Poignant-Sound Filter.*