

FÍSICA APLICADA E MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM MULTIDISCIPLINAR NO ENSINO DE FÍSICA PARA ENGENHEIROS

Evandro de Souza Pereira – evandro.souzapereira@hotmail.com

Maurício Bernardino Magro – mauriciobmagro@gmail.com

Centro Universitário Fundação Santo André, FAENG

Endereço: Av. Príncipe de Gales, 821 - Bairro Príncipe de Gales

CEP 09060-650 - Santo André - SP

***Resumo:** Desenvolvemos um estudo sobre métodos numéricos e modelagem de sistemas físicos ligados a conceitos fundamentais de tópicos da Física Clássica que envolve os assuntos básicos de um curso de Engenharia, como Física, Cálculo e Geometria Analítica e buscamos identificar as principais dificuldades enfrentadas e interesses dos alunos de Engenharia. A partir dessas observações, desenvolvemos mecanismos de aprendizado e novas ferramentas para o ensino destas disciplinas, tendo em vista a realidade do aluno de Engenharia atual.*

***Palavras-chave:** Modelagem matemática, Técnicas computacionais, Ensino de física para engenheiros.*

1. INTRODUÇÃO

As últimas décadas testemunharam a modernização tecnológica da sociedade com características aparentemente contraditórias: (i) a falta de investimentos em ciência e tecnologia e (ii) política industrial burocratizante (ARAÚJO & LEZANA, 2000). O mercado brasileiro começou a abertura para a incorporação de elementos externos nos anos 90, com uma indústria marcada pela falta de preparo para a competição mundial e esse cenário persiste até os dias de hoje. Desse modo, é necessário capacitar os profissionais para vencerem este período de transição entre um mundo de alta tecnologia e um país em desenvolvimento. É nesse contexto que se faz necessário repensar as atividades ligadas aos cursos de Engenharia e de Física. Portanto, é fundamental que o profissional tenha e desenvolva alguns atributos necessários para dar respostas rápidas e eficientes no decorrer de sua atuação profissional, dentre os quais podemos citar (ARAÚJO & LEZANA, 2000):

- a) Conhecimento científico-tecnológico para vencer desafios e a rápida evolução do conhecimento;
- b) Conhecimento de informática como instrumento do exercício da engenharia;
- c) Capacidade para a solução de problemas.

Um dos desafios da Física e da Engenharia, a nosso ver, é o de modelar um problema de forma precisa. Este trabalho é frequente no estudo da Física e da Matemática e de fundamental importância para o profissional quanto à aplicação da Matemática a problemas práticos, assim como a discussão dos limites de modelos criados ou já estabelecidos. Ausente no ensino tradicional, a modelagem de problemas (GARCÍA-RAFFI, 1999; SÁNCHEZ-

PÉREZ, 1999) é uma ferramenta indispensável na formação do profissional e cientista de hoje. As possibilidades que o computador nos oferece justificam um enfoque direcionado à aplicação e ampliação de conhecimentos matemáticos que ultrapassam os programas das disciplinas tradicionais. O uso generalizado da informática faz com que o aluno possa entender e manipular conceitos que estão ao seu alcance, embora requeira muitas vezes uma capacidade de cálculo mais ampla, reservada a cursos especializados.

A proposta deste trabalho é explorar problemas de interesse à comunidade local, utilizando conceitos básicos de Física e Matemática, proporcionando ao aluno autonomia necessária para a sua solução, fazendo uso, quando necessário, de técnicas de programação. Para isto é necessário interligar conceitos físicos e técnicas matemáticas, onde aqueles são fundamentais, criando condições para a fixação de tais conteúdos e introduzindo o aluno no universo científico. Desse modo, a utilização da modelagem em caráter interdisciplinar pretende atingir três objetivos fundamentais:

- a) Introdução às técnicas de modelagem;
- b) Melhoria da aquisição de conhecimento em Física e Matemática;
- c) Introdução às técnicas experimentais de aquisição de dados.

Para tal, deve-se dividir o trabalho em três estágios: (1) propor problemas específicos, de caráter multidisciplinar, que envolvam conceitos de difícil compreensão, como são, por exemplo, os assuntos relacionados ao Eletromagnetismo as ferramentas de Cálculo necessárias para desenvolvê-los; (2) apresentar a solução de tais problemas, de tal forma que o método de solução ajuste-se aos conteúdos vistos nas disciplinas básicas de Engenharia, estimulando o aluno a direcionar seus esforços a temas de seu interesse; e (3) implementar uma metodologia de aplicação desses problemas em sala de aula medindo-se o grau de aprendizado do aluno. Neste trabalho, desenvolveremos, apenas, os dois primeiros estágios.

2. OBJETIVOS

Desenvolvemos atividades extracurriculares para serem propostas aos alunos de um curso de Engenharia, proporcionando-lhes uma forma alternativa, eficiente e motivadora para o aprendizado dos conceitos fundamentais de Física e Matemática.

Apresentamos problemas específicos com enfoque nos conceitos básicos de eletromagnetismo para futura apresentação a alunos regulares de um curso regular de Engenharia para que se possa obter um comparativo entre a aprendizagem através do estudo tradicional e o método de problemas propostos. Nestes projetos, desde o ponto de vista estritamente matemático, pretende-se que o aluno familiarize-se com os seguintes conceitos:

- a) Métodos de modelagem matemática que envolvam conceitos de cálculo e geometria analítica;
- b) Resolução de sistema de equações não-lineares;
- c) Métodos numéricos para encontrar soluções;
- d) Estudo da dependência da modelagem com respeito a alguns parâmetros introduzidos nela;
- e) Trabalho em equipe.

A estrutura do trabalho foi planejada de forma que se possa captar a natureza do problema, e tentar, em primeiro lugar, escolher um conjunto de equações simples que podem conduzir à descrição do sistema dinâmico, e em segundo lugar, que se utilizem ferramentas matemáticas necessárias para a resolução do mesmo. O objetivo final foi, não somente

compreender o manejo e alcance das fórmulas matemáticas, mas também desenvolver certa intuição com respeito a que situações reais podem ser modeladas com uma precisão aceitável utilizando as mesmas.

O primeiro passo, portanto, consistiu na compreensão dos problemas, cujos enunciados são descritos na seção 3.

3. ESTUDO DE CASO

A atividade citada nesta seção esta em inglês, uma vez que acreditamos que a interdisciplinaridade é um estímulo importante no aprendizado do aluno de Engenharia. Dessa forma, pretendemos incluir nos estudos não somente as disciplinas básicas da área de exatas, como também o desenvolvimento da linguagem como ferramenta importante no desenvolvimento do aluno.

- 1ª Atividade:

The Coulomb's Law

Coulomb's Law. It is well know that two electric charged bodies interact with each other at distance through attraction or repulsion forces. If two electric charged bodies with charges q_1 and q_2 , separated by a distance \vec{r} , are taken to be very small, the interaction force between them are said to obey the Coulomb's Law

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

where

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,99 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2 \quad (2)$$

is the Coulomb's Constant, determined experimentally. In this work we will use always the International Metric System.

In situations with several charges interacting with each other, the Superposition Principle says that the resulting interaction among a given charge q_0 and the others has to be summed up over all contributions as follows

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (3)$$

where \vec{F}_i are the forces that each other charge makes over q_0 .

Equilibrium. In situations with several charges interacting, an interesting issue is finding the equilibrium state, i.e., the correct position of all electric charges that leads to

$$\vec{F}_R = 0 \quad (4)$$

on a specific charge q_i . When that happens it is said that q is in an equilibrium state, since without resulting force, there is no acceleration applied on q_i .

The exercise. Consider three small electric charges with equal magnitude q which are fixed in the vertices of a triangle as the Figure 1 shows. A fourth small charge Q is free to move over the positive x -axis under the influence of the forces provoked by the other three fixed charges.

- 1) Based on the Coulomb's Law, find algebraic expressions for the forces of each of the charges q over Q .
- 2) Based on the Superposition Principle, find an algebraic expression for the resulting force that all three fixed charges make on Q .
- 3) Using the Matlab® program, calculate the resulting force $F(s)$ over Q as a function of s .
- 4) Draw a graph of $F(s) \times s$.
- 5) Find the maximum value for $F(s)$.

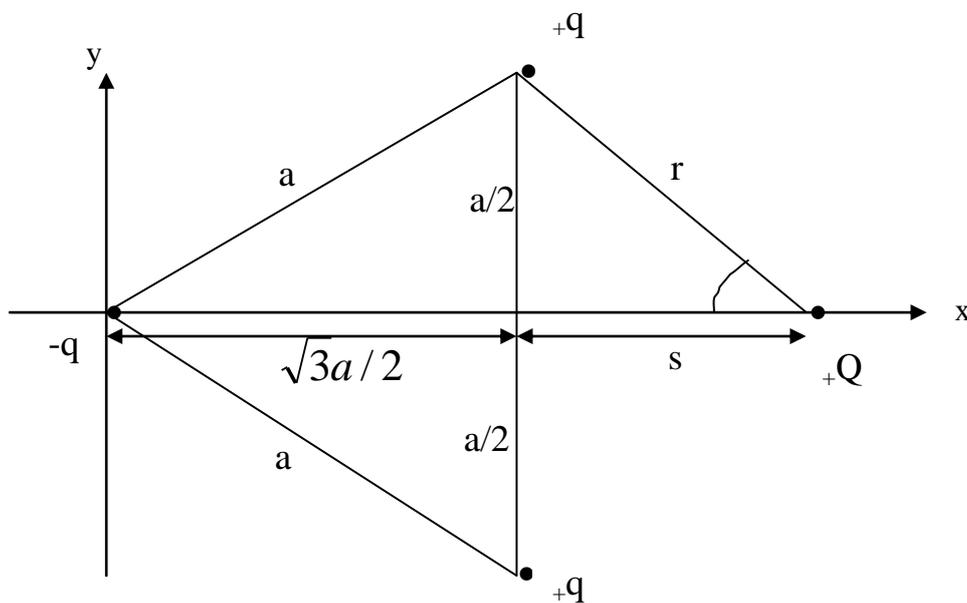


Figure 1 – Disposition of the four charges for equilibrium.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A resolução completa do problema proposto na Seção 3, com a discussão dos resultados, estão descritos abaixo:

4.1. Expressões algébricas para as forças de cada uma das cargas q sobre Q :

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{\left(\sqrt{5}a/2 + s\right)^2} [\cos 306^\circ i + \text{sen}360^\circ j] \quad (5)$$

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\sqrt{a^2/4 + s^2}\right)^2} \left[\cos \tan^{-1}\left(\frac{a/2}{s}\right) - \text{sen} \tan^{-1}\left(\frac{a/2}{s}\right) 360^\circ j \right] \quad (6)$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + s^2}\right)^2} \left[\cos \tan^{-1}\left(\frac{a/2}{s}\right) + \text{sen} \tan^{-1}\left(\frac{a/2}{s}\right) j \right] \quad (7)$$

4.2 Expressão algébrica baseada no princípio da superposição:

Segundo o princípio da superposição (NUSSENZVEIG, 2003; HALLIDAY *et al.*, 2009), a força total sobre a carga Q é

$$F(s) = F_0 + F_1 + F_2 \quad (8)$$

com

$$F(s) = \frac{-4Qq}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-i}{(3a^2 + 4s\sqrt{3a} + 4s^2)} - \frac{2}{(4s^2 + a^2)} \cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{a/2}{2s}\right)\right] \right\} \quad (9)$$

4.3. O programa Matlab

O programa Matlab® (MATHWORKS, 2013) foi utilizado para calcular a força resultante $F(s)$, Equação (9), em função da distância s .

4.4. Gráficos

Segue abaixo o gráfico da função $F(s)$:

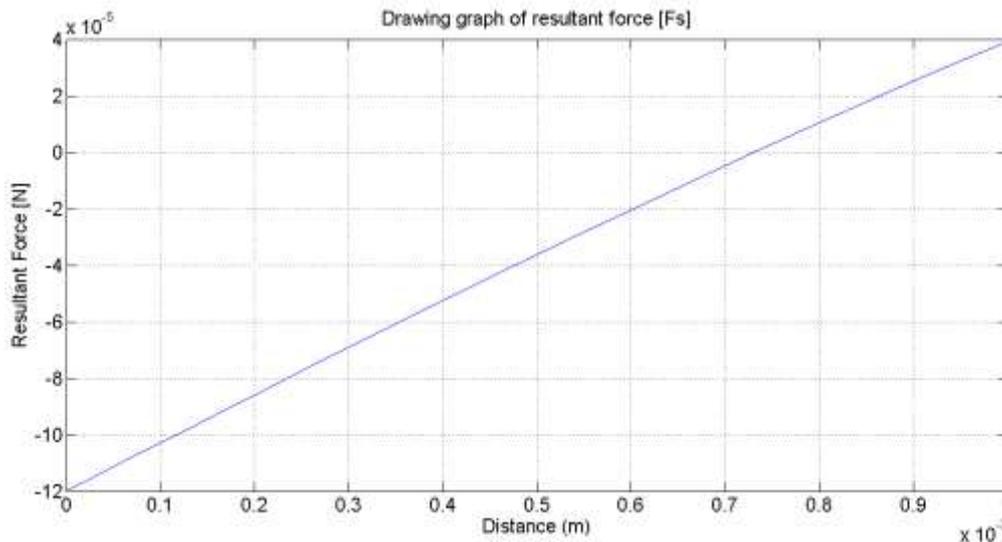


Figura 2 - Gráfico referente à Equação 9 que representa da força resultante $F(s)$ em função da distância s .

4.5. Máximos

O valor de máximo da Equação 9 pode ser calculado resolvendo a seguinte equação em s [GUIDORIZZI, 2001]

$$\frac{\partial F}{\partial s} = K \left[\frac{\partial f(s)}{\partial s} - \frac{\partial g(s)}{\partial s} \right] = 0 \quad (10)$$

onde

$$f(s) = (3a^2 + 4s\sqrt{3}a + 4s^2)^{-1}; \quad g(s) = 2(4s^2 + a^2)\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{a}{2s}\right)\right] \quad (11)$$

Portanto, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial s} = k \left[-\frac{4a\sqrt{3} + 8s}{(3a^2 + 4s\sqrt{3}a + 4s^2)^2} + \frac{16s}{(4s^2 + a^2)^2} \cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{a}{2s}\right) - \frac{2}{(4s^2 + a^2)} \frac{\left(\frac{a}{2s^2}\right) \text{sen}\left[\tan^{-1}\frac{a}{2s}\right]}{1 + \left(\frac{a}{2s}\right)^2}\right] \right] \quad (12)$$

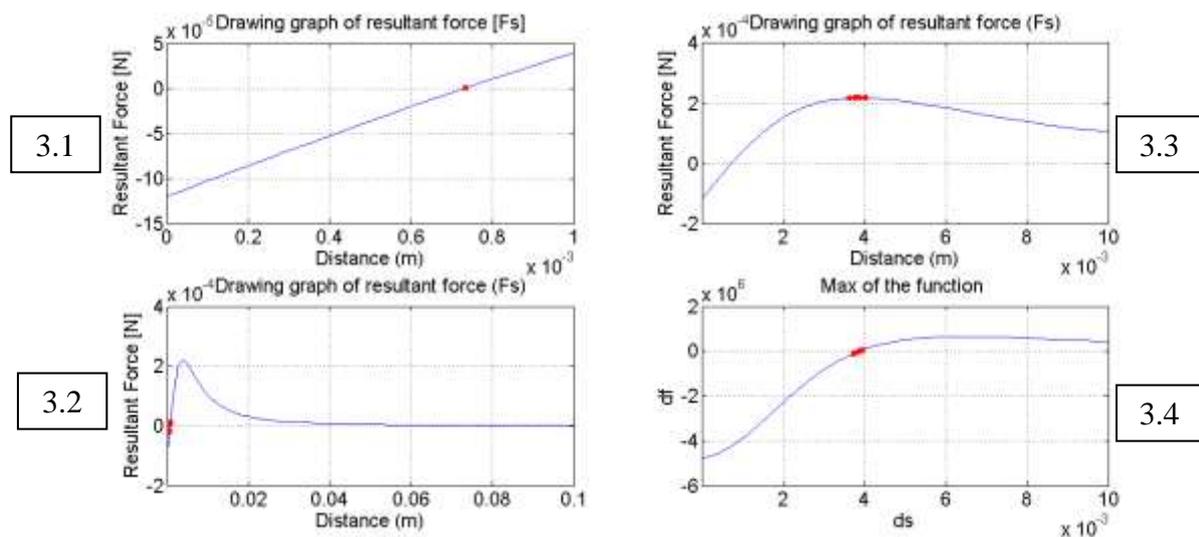


Figura 3 - Gráfico referente à Equação 9 que representa da força resultante em função da distância s em diferentes escalas [(3.1), (3.2) e (3.3)] e o máximo da função $F(s)$, dada pela Equação 12 [(3.4)].

4.6 Discussão dos resultados

Na Figura 2 foi possível identificar a região, indicada em vermelho, que demonstra o ponto de equilíbrio da carga Q . Nota-se que há apenas um ponto de equilíbrio para o problema, ou seja, apenas uma posição correta em que todas as cargas elétricas levam a $F(s) = 0$ e quando isso acontece, é dito que Q está num estado de equilíbrio, uma vez que, não havendo força resultante, não há nenhuma aceleração aplicada em Q .

Nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 foi possível analisar os gráficos com o mesmo resultado em diferentes escalas, procurando-se demonstrar a importância da determinação adequada da

escala de um gráfico para a obtenção de um resultado correto. Ainda, na Figura 3.4 é apresentado o máximo da função de acordo com a Equação 12, ou seja, foi determinada a raiz definindo o ponto onde o gráfico intercepta o eixo das abscissas, ou distância s , no qual o vértice é um máximo absoluto da função. É importante salientar que a determinação de máximos e mínimos de uma função pode ser utilizada em inúmeras aplicações, na vida cotidiana e no estudo de outras ciências.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que o desenvolvimento desses projetos será de grande utilidade para a aprendizagem do ensino de Física para engenheiros, pois, os mesmos abrangem uma gama de disciplinas envolvidas em um curso regular de Engenharia. Essa primeira atividade apresentada é apenas uma de outras seis atividades que estão sendo desenvolvidas, todas com o foco nos fundamentos do Eletromagnetismo. Um dos próximos passos desse trabalho é o desenvolvimento de uma proposta para a aplicação prática desses projetos em uma sala de aula regular de Engenharia.

Agradecimentos

Os autores agradecem o Centro Universitário Fundação Santo André pelo financiamento parcial desse trabalho dentro do programa PIIC.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, F. E.; LEZANA, A. G. R. Formação do Engenheiro Empreendedor. Anais: XXVIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. Ouro Preto/MG, 2000.

GARCÍA-RAFFI, L. M.; SÁNCHEZ-PÉREZ, E. A.; MARTINEZ-GIMÉNEZ, F. Dos ejemplos de introducción de los métodos de simulación Monte Carlo em los primeros cursos de las carreras técnicas, **Lecturas Matemáticas** (Colômbia) n. 20, p. 7-28, 1999.

GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo, Vol. 1. **Ed. LTC**, 2001.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. e WALKER, J. Fundamentos de Física. Volume 3. (6ª edição). **Ed. LTC**, 2009.

MATHWORKS. Matlab – the language of the chinal computing. Software disponível em <<http://www.mathworks.com/products/matlab/>>. Acesso em 31 de jul. 2013.

NUSSENZVEIG, Moysés H. Curso de Física Básica, volume 3. **Ed. Edgard Blücher Ltda.**, 2002.

SÁNCHEZ-PÉREZ, E. A.; GARCÍA-RAFFI, L. M.; SÁNCHEZ-PÉREZ, J. V. Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas, **Enseñanza de las Ciencias** v. 1, n. 17, p. 119-129, 1999.

APPLIED PHYSICS AND MATHEMATICAL MODELING: A MULTIDISCIPLINAR APPROACH TO PHYSICS TEACHING FOR ENGINEERING STUDENTS

Abstract: *We have developed a study on numerical methods and modeling of physical systems linked to fundamental concepts of classical physics topics which is related to basic subjects of the Engineering courses such as Physics, Calculus and Analytic Geometry and seek to identify the major difficulties and interests of engineering students. From these observations we have developed learning mechanisms and teaching tools for these subjects concerning the reality of the current Engineering students.*

Keywords: *Mathematical Modeling, Computational Techniques, Teaching Physics for Engineers.*